

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

Un nuevo método de elementos finitos mixtos
aumentados para el problema de Navier–Stokes –
Darcy

Tesis presentada al Programa de Magíster en Matemática, Mención Matemática Aplicada, o Mención Estadística del Departamento de Estadística y Departamento de Matemática de la Universidad del Bío-Bío, como parte de los requisitos para la obtención del grado de Magíster en Matemática con Mención en Matemática Aplicada.

Nathalie Valenzuela

Profesor Guía: Ricardo Oyarzúa
Profesor Co-guía: Gabriel N. Gatica

Concepción, 2019.

Un nuevo método de elementos finitos mixtos aumentados para el problema de Navier–Stokes – Darcy

por

Nathalie Valenzuela Cachicas

Disertación presentada al Programa de Magíster en Matemática, Mención Matemática Aplicada, o Mención Estadística del Departamento de Estadística y Departamento de Matemática de la Universidad del Bío Bío, como requisito parcial para la obtención del Grado de Magíster en Matemática con Mención en Matemática Aplicada.

Comisión examinadora:

Dr. Ricardo Oyarzúa
Profesor Guía
Universidad del Bío-Bío, Chile

Dr. Gabriel N. Gatica
Profesor Co-guía
Universidad de Concepción, Chile

Dra. Jessika Camaño
Profesor Informante
Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile

Dr. Eligio Colmenares
Profesor Informante
Universidad del Bío-Bío, Chile

Índice general

1. Introducción	6
2. Un nuevo método de elementos finitos mixtos aumentados para el problema de Navier–Stokes – Darcy	11
2.1. Problema modelo	11
2.2. Problema continuo	14
2.2.1. El problema variacional mixto aumentado	14
2.2.2. Análisis del problema continuo	18
2.3. Esquema de Galerkin	24
2.3.1. Problema Discreto	25
2.3.2. Unicidad de la solución del problema discreto	27
2.3.3. Estimación de Cea	29
2.3.4. Un esquema mixto particular de elementos finitos	31
3. Ejemplos numéricos	37
Bibliografía	41

Resumen

El objetivo de esta tesis es introducir y analizar un nuevo esquema mixto-aumentado para el problema acoplado de Navier–Stokes–Darcy estacionario. El enfoque que emplearemos consiste en utilizar, para la región de fluido libre, una técnica previamente aplicada a las ecuaciones estacionarias de Navier–Stokes en la cual se introduce un tensor de pseudo-esfuerzo modificado que relaciona la presión con los términos difusivo y convectivo. Adicionalmente, usando la condición de incompresibilidad, se elimina la presión, y como el término convectivo fuerza a la velocidad del fluido a vivir en un espacio más pequeño de lo usual, aumentamos la formulación resultante con términos residuales adecuados, provenientes de la ecuación constitutiva y de la ecuación de equilibrio. Por otro lado, en la región de Darcy aplicamos la formulación mixta usual, la cual induce la introducción de la traza de la presión en el medio poroso como un multiplicador de Lagrange. Esto último está relacionado con el hecho que la condición de transmisión que involucra conservación de masa se vuelve esencial y debe ser impuesta débilmente. De este modo, obtenemos una formulación con cinco incógnitas dadas por el tensor de pseudo-esfuerzo y la velocidad en el fluido, la velocidad y la presión en el medio poroso, y el ya mencionado multiplicador de Lagrange. El análisis de existencia y unicidad de solución de nuestro esquema se lleva a cabo combinando la teoría clásica de Babuška–Brezzi y el teorema de punto fijo de Banach. A su vez, a nivel discreto se definen subespacios de elementos finitos genéricos y se plantean hipótesis adecuadas sobre estos de forma que, adaptando adecuadamente los argumentos utilizados en el análisis del problema continuo, se pueda probar que el esquema de Galerkin resultante está bien puesto y es convergente. En particular, elementos de Raviart-Thomas de orden bajo para el tensor de pseudo-esfuerzo y la velocidad de Darcy, funciones continuas y lineales a trozos para la velocidad del fluido libre, funciones constantes a trozos para la presión de Darcy, junto con elementos continuos y lineales a trozos para el multiplicador de Lagrange, constituyen una elección adecuada. Finalmente, proporcionaremos algunos resultados numéricos para ilus-

trar el buen comportamiento del método de Galerkin propuesto y para confirmar la tasa de convergencia teórica.

Capítulo 1

Introducción

En esta tesis introducimos un nuevo esquema de elementos finitos para resolver numéricamente el acomplamiento de un fluido libre, gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes, con un medio poroso, modelado por la ley de Darcy, acoplados a través de condiciones de interfase dadas por la ley conservación de masa, balance de fuerzas normales y la ley de Beavers–Joseph–Saffman. Más precisamente, utilizando un enfoque introducido recientemente para las ecuaciones de Navier–Stokes estacionarias, basado en la introducción de un tensor de pseudo-esfuerzo que relaciona el término difusivo con el término convectivo y la presión, y considerando la formulación mixta usual de para ley de Darcy, la cual induce la introducción de la traza de la presión en el medio poroso como un multiplicador de Lagrange asociado, proponemos un nuevo esquema de elementos finitos mixto aumentado para el problema acoplado, donde el ya mencionado tensor de pseudo-esfuerzo, junto con el multiplicador de Langrange la velocidad del fluido en ambos dominios y la presión de Darcy, constituyen las incógnitas principales del sistema. La presión en la región del fluido libre, así como el gradiente de la velocidad del fluido y el tensor de esfuerzo, pueden ser recuperados fácilmente a través de un post-proceso.

Un número considerable de documentos científicos se han introducido en las últimas décadas para proponer nuevas técnicas numéricas para resolver computacionalmente el sistema acoplado de Navier–Stokes–Darcy, o su versión linealizada donde las ecuaciones de Stokes se consideran en vez del sistema de Navier–Stokes. Lo anterior se debe a las distintas aplicaciones que tiene este tipo de modelos en diferentes áreas de interés, tales como medicina, ingeniería petrolera, y ciencias ambientales, etc. (ver e.g. [1, 4, 5, 11, 13, 14, 15, 17, 20, 21, 22, 24, 26, 31, 33] y las referencias en los mismos). La lista anterior incluye métodos

iterativos, métodos mortar, métodos de Galerkin discontinuo (DG) y esquemas de Galerkin discontinuo hibridizable (HDG), así como formulaciones estabilizadas. En general, la mayor parte de las formulaciones de elementos finitos están basadas en la utilización de discretizaciones de la velocidad y la presión para la parte del fluido libre del sistema acoplado (ver, por ejemplo [1, 11, 13, 14, 17, 26, 31, 33]). Sin embargo, en esta tesis nos concentraremos en esquemas basados en formulaciones duales-mixtas para el fluido libre, las cuales han ganado un gran interés últimamente, debido principalmente al hecho que, por un lado, permiten unificar el análisis para fluidos Newtonianos y no-Newtonianos, y por otro lado, nos permiten aproximar diversas variables de interés físico, ya sea directamente a través de la formulación empleada, o usando fórmulas de post-proceso.

Volviendo al modelo de Stokes-Darcy, en [5, 22, 20] se introdujo un nuevo método de elementos finitos mixto para aproximar la solución del sistema acoplado, considerando fluidos Newtonianos (en [5, 22]) y no-Newtonianos (en [20]). Estos métodos se basan en la introducción de un tensor de pseudo-esfuerzo (en [20, 22]) o de esfuerzo (en [5]), lo que permite, por un lado, unificar el análisis, y por otro lado, emplear la misma familia de elementos finitos en ambos dominios. En particular, en [5], dos nuevas formulaciones mixtas fueron introducidas para el sistema lineal acoplado. El primero extiende [22] introduciendo una nueva formulación mixta donde se considera el tensor de esfuerzo en vez del de pseudo-esfuerzo en el dominio de fluido libre, lo que induce a la introducción de la vorticidad como una incógnita adicional. A su vez, la ya mencionada formulación basada en el tensor de esfuerzo se aumenta parcialmente con términos de mínimos cuadrados de tipo Galerkin provenientes de la ecuación constitutiva y de equilibrio de las ecuaciones de Stokes, y de la relación que define la vorticidad en términos de la velocidad del fluido, dando origen de esta manera al segundo método. La mayor ventaja de este último método es la flexibilidad al momento de elegir subespacios discretos para las variables en el dominio de Stokes ya que no se necesitan condiciones inf-sup para obtener estabilidad del método.

Por otro lado, los resultados obtenidos en [20] se extendieron recientemente en [9] al problema acoplado de Navier–Stokes–Darcy, considerando densidad constante y viscosidad variable en la región de fluido libre. Debido a la no linealidad relacionada con la viscosidad, se introduce el gradiente de velocidad como incógnita adicional, que junto al esfuerzo, la vorticidad, la velocidad del fluido en ambos dominios, la presión del medio poroso y dos multiplicadores de Lagrange; a saber, la traza de la presión del medio poroso y la velocidad del fluido en la interfase, constituyen las incógnitas principales del sistema. Adicionalmente,

como el término convectivo del modelo de Navier-Stokes fuerza a la velocidad a vivir en un espacio mas pequeño que L^2 , procediendo como en [6, 8, 7] se propone buscar la velocidad en H^1 y consecuentemente la formulación variacional resultante es aumentada con términos residuales que provienen de las ecuaciones constitutivas y de equilibrio de Navier-Stokes y las fórmulas que relacionan los tensores de vorticidad y de deformación. Al igual que el segundo método en [5], este último también permite una mayor flexibilidad a la hora de elegir subespacios discretos para las variables en el dominio de Navier-Stokes.

El propósito de esta tesis es contribuir al estudio de aproximaciones numéricas para el acoplamiento de fluidos con medios porosos, introduciendo un nuevo esquema aumentado para el acoplamiento de Navier-Stokes-Darcy estacionario. Aquí, procedemos de forma análoga a [7] en la región de Navier-Stokes, y a diferencia de [5] y [9], aprovechamos del hecho que la velocidad del fluido está considerada en H^1 y así evitamos introducir la vorticidad y la traza de la velocidad del fluido sobre la interfase como incógnita adicional. De esta forma, obtenemos un método más sencillo que consiste en un esquema de sólo 5 incógnitas.

El resto de la tesis se organizará como sigue. En la Sección 2.1 recordaremos el problema modelo y reescribiremos las ecuaciones fuertes como un sistema de ecuaciones de primer orden. En la Sección 2.2, derivaremos la formulación variacional aumentada, la cual, a diferencia de [5, 9] no incluye la vorticidad ni la traza de la velocidad del fluido en la interfase como incógnitas auxiliares. A continuación, procederemos con el análisis de existencia y unicidad de solución de nuestro problema, principalmente a través del teorema de Banach y la teoría clásica de Babuška-Berzzi, asumiendo que los datos son suficientemente pequeños. A su vez, en Sección 2.3, estudiaremos el esquema de Galerkin asociado correspondiente utilizando la versión discreta de la estrategia de punto fijo desarrollada en Sección 2.2. Adicionalmente, en Sección 2.3 se deduce, bajo supuestos similares sobre el tamaño de los datos, la estimación de error a priori y se derivan las tasas de convergencia correspondientes para una elección particular de subespacios discretos. Finalmente, en el Capítulo 3 se ilustran algunos ejemplos numéricos para corroborar el buen comportamiento del método y confirmar las tasas de convergencia teóricas.

Concluimos esta sección recordando algunas definiciones y fijando algunas notaciones. Dados los vectores $\mathbf{v} = (v_i)_{i=1,n}$ y $\mathbf{w} = (w_i)_{i=1,n}$, con $n \in \{2, 3\}$, se definen los operadores

gradiente, divergencia, y producto tensorial, como

$$\nabla \mathbf{v} := \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,n}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} := \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_j}, \quad \text{y} \quad \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} := (v_i w_j)_{i,j=1,n}.$$

Además, para cualquier par de tensores $\mathbf{S} = (S_{ij})_{i,j=1,n}$ y $\mathbf{R} := (R_{ij})_{i,j=1,n}$, definimos la transpuesta, la traza, el producto tensorial interno, y el tensor desviador, respectivamente, como

$$\mathbf{S}^t := (S_{ji})_{i,j=1,n}, \quad \operatorname{tr}(\mathbf{S}) := \sum_{i=1}^n S_{ii}, \quad \mathbf{S} : \mathbf{R} := \sum_{i,j=1}^n S_{ij} R_{ij}, \quad \text{y} \quad \mathbf{S}^d := \mathbf{S} - \frac{1}{n} \operatorname{tr}(\mathbf{S}) \mathbf{I},$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad en $\mathbb{R}^{n \times n}$. Para evitar cualquier tipo de confusiones, $|\cdot|$ denotará la norma Euclidiana en \mathbb{R}^n ó $\mathbb{R}^{n \times n}$. Adicionalmente, utilizaremos la terminología estándar simplificada para los espacios de Sobolev y normas. En particular, si \mathcal{O} es un dominio, Γ es una curva de Lipschitz abierta o cerrada (superficie en \mathbb{R}^3 , respectivamente), y $r \in \mathbb{R}$, definimos

$$\mathbf{H}^r(\mathcal{O}) := [\mathbf{H}^r(\mathcal{O})]^n, \quad \mathbb{H}^r(\mathcal{O}) := [\mathbf{H}^r(\mathcal{O})]^{n \times n}, \quad \text{y} \quad \mathbf{H}^r(\Gamma) := [\mathbf{H}^r(\Gamma)]^n,$$

y para $r = 0$ adoptaremos la convención usual de escritura $\mathbf{L}^2(\mathcal{O})$, $\mathbb{L}^2(\mathcal{O})$, y $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ en vez de $\mathbf{H}^0(\mathcal{O})$, $\mathbb{H}^0(\mathcal{O})$, y $\mathbf{H}^0(\Gamma)$, respectivamente. Denotaremos las correspondientes normas por $\|\cdot\|_{r,\mathcal{O}}$ para $\mathbf{H}^r(\mathcal{O})$, $\mathbf{H}^r(\mathcal{O})$ y $\mathbb{H}^r(\mathcal{O})$, y $\|\cdot\|_{r,\Gamma}$ para $\mathbf{H}^r(\Gamma)$ y $\mathbf{H}^r(\Gamma)$. También escribiremos $|\cdot|_{r,\mathcal{O}}$ para seminorma \mathbf{H}^r . Adicionalmente, recordaremos que

$$\mathbf{H}(\operatorname{div}; \mathcal{O}) := \{ \mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O}) : \operatorname{div} \mathbf{w} \in L^2(\mathcal{O}) \},$$

es un espacio de Hilbert estándar(ver, e.g. [3, 25]), y el espacio de las matrices cuyas filas son funciones que pertenecen a $\mathbf{H}(\operatorname{div}; \mathcal{O})$ serán denotadas por $\mathbb{H}(\mathbf{div}; \mathcal{O})$. La norma de $\mathbf{H}(\operatorname{div}; \mathcal{O})$ y $\mathbb{H}(\mathbf{div}; \mathcal{O})$ será denotada por $\|\cdot\|_{\operatorname{div},\mathcal{O}}$ y $\|\cdot\|_{\mathbf{div},\mathcal{O}}$, respectivamente. Notar además que $\mathbb{H}(\mathbf{div}; \mathcal{O})$ se puede caracterizar como el espacio de las funciones matriciales \mathbf{S} tal que $\mathbf{c}^t \mathbf{S} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}; \mathcal{O})$ para cualquier vector columna con entradas reales \mathbf{c} . Adicionalmente, se cumple la siguiente propiedad

$$\mathbb{H}(\mathbf{div}; \mathcal{O}) = \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \mathcal{O}) \oplus P_0(\mathcal{O}) \mathbf{I}, \tag{1.1}$$

donde

$$\mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \mathcal{O}) := \left\{ \mathbf{S} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}; \mathcal{O}) : \int_{\mathcal{O}} \operatorname{tr} \mathbf{S} = 0 \right\} \tag{1.2}$$

y $P_0(\mathcal{O})$ es el espacio de polinomios constantes sobre \mathcal{O} . Más precisamente, cada $\mathbf{S} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}; \mathcal{O})$ puede ser descompuesto únicamente como:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + c\mathbf{I}, \quad \text{with } \mathbf{S}_0 \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \mathcal{O}) \quad \text{y} \quad c := \frac{1}{n|\mathcal{O}|} \int_{\mathcal{O}} \text{tr } \mathbf{S} \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Dicha descomposición se utilizara en el análisis posterior de formulaciones débiles.

Además, dado un entero $k \geq 0$, el conjunto $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $P_k(M)$ denota el espacio de los polinomios sobre M de grado $\leq k$. Adicionalmente, consideramos $\mathbf{P}_k(M) := [P_k(M)]^n$ and $\mathbb{P}_k(M) := [P_k(M)]^{n \times n}$. Finalmente, en todo el resto de este documento, emplearemos $\mathbf{0}$ para denotar cualquier vector nulo genérico (incluidos funcionales y operadores nulos), y usaremos C y c , con o sin subíndices, barras, tildes o sombreros para denotar las constantes genéricas independientes de la discretización, las cuales pueden tomar distintos valores en diferentes espacios.

Por otro lado, los simbolos para los productos internos de $L^2(\Gamma)$ y $\mathbf{L}^2(\Gamma)$,

$$\langle \xi, \lambda \rangle_{\Gamma} := \int_{\Gamma} \xi \lambda, \quad \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\Gamma} := \int_{\Gamma} \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\lambda}$$

se emplearán para sus respectivas extensiones, como los productos duales $H^{-1/2}(\Sigma) \times H^{1/2}(\Sigma)$ y $\mathbf{H}^{-1/2}(\Sigma) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Sigma)$.

Capítulo 2

Un nuevo método de elementos finitos mixtos aumentados para el problema de Navier–Stokes – Darcy

2.1. Problema modelo

Comenzaremos describiendo la geometría del problema. Con este fin, consideraremos los dominios poligonales acotados y simplemente conectados Ω_S y Ω_D en \mathbb{R}^n , $n \in \{2, 3\}$, tal que $\partial\Omega_S \cap \partial\Omega_D = \Sigma \neq \emptyset$ y $\Omega_S \cap \Omega_D = \emptyset$, y sea $\Gamma_S := \partial\Omega_S \setminus \bar{\Sigma}$ y $\Gamma_D := \partial\Omega_D \setminus \bar{\Sigma}$. Sobre las fronteras consideraremos el vector normal unitario \mathbf{n} , el cual se escoje de manera que apunte hacia afuera de $\Omega_S \cup \Sigma \cup \Omega_D$ y Ω_S (y por lo tanto apunta hacia el interior de Ω_D , cuando es visto desde Σ). Adicionalmente en Σ consideraremos una base local ortonormal para el hiperplano tangente, dado por $\{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{n-1}\}$. Para una representación bidimensional de la geometría del problema, ver la figura 2.1, donde simplemente denotamos $\mathbf{t} = \mathbf{t}_1$

Nuestro problema acoplado consiste en dos sets de ecuaciones que describen el comportamiento del fluido en ambos dominios, Ω_S y Ω_D , y el set de condiciones en la interfase Σ . Más precisamente, en Ω_S las ecuaciones que rigen el problema Navier – Stokes con viscosidad y densidad constantes, son:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_S &= 2\nu \mathbf{e}(\mathbf{u}_S) - p_S \mathbf{I} \quad \text{en } \Omega_S, & \rho(\mathbf{u}_S \cdot \nabla)\mathbf{u}_S - \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_S &= \mathbf{f}_S \quad \text{en } \Omega_S, \\ \mathbf{div} \mathbf{u}_S &= 0 \quad \text{en } \Omega_S, & \mathbf{u}_S &= \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_S \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde \mathbf{u}_S denota la velocidad del fluido, p_S es la presión, $\nu > 0$ y $\rho > 0$ la viscosidad y la

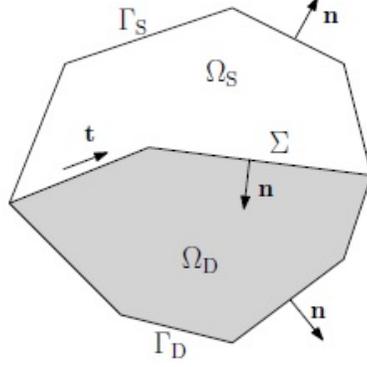


Figura 2.1: Configuración geométrica del modelo Navier/Stokes–Darcy

densidad, respectivamente, σ_S es el tensor de esfuerzo de Cauchy, \mathbf{f}_S es una fuerza externa dada, la cual está definida sobre un espacio que se especificará más adelante, y \mathbf{e} es el tensor de deformación, dado por

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}_S) := \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_S + (\nabla \mathbf{u}_S)^t),$$

donde el subíndice t denota transposición. Mientras las ecuaciones fuertes de Navier–Stokes son presentadas para describir el comportamiento del fluido en Ω_S , a lo largo de este documento presentaremos una versión equivalente de (2.1) basado en la introducción de un tensor de pseudo-estreses que relaciona el tensor $\boldsymbol{\sigma}$ con el término convectivo. Más precisamente, de manera análoga a [6] y [9], introducimos el tensor no lineal de pseudo-éstres

$$\mathbf{T}_S := \boldsymbol{\sigma}_S - \rho(\mathbf{u}_S \otimes \mathbf{u}_S) = 2\nu \mathbf{e}(\mathbf{u}_S) - p_S \mathbf{I} - \rho(\mathbf{u}_S \otimes \mathbf{u}_S), \quad (2.2)$$

y debido a la condición de incompresibilidad $\text{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{u}_S)) = \text{div} \mathbf{u}_S = 0$ en Ω_S , podemos deducir las siguientes identidades

$$p_S = -\frac{1}{n} \{\text{tr}(\mathbf{T}_S) + \text{tr}(\mathbf{u}_S \otimes \mathbf{u}_S)\} \quad \text{en} \quad \Omega_S \quad \text{y} \quad -\text{div} \mathbf{T}_S = \mathbf{f}_S. \quad (2.3)$$

Notar que la primera identidad nos permite eliminar la incógnita presión en (2.1), obteniendo

$$\mathbf{T}_S^d = 2\nu \mathbf{e}(\mathbf{u}_S) - (\mathbf{u}_S \otimes \mathbf{u}_S)^d \quad \text{en} \quad \Omega_S.$$

Entonces, considerando

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{u}_S) := \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_S - (\nabla \mathbf{u}_S)^t), \quad (2.4)$$

las ecuaciones de Navier-Stokes (2.1) pueden ser reescritas equivalentemente como:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_S^d &= 2\nu\nabla\mathbf{u}_S - 2\nu\boldsymbol{\omega}(\mathbf{u}_S) + \rho(\mathbf{u}_S \otimes \mathbf{u}_S)^d \quad \text{en } \Omega_S, & -\mathbf{div} \mathbf{T}_S &= \mathbf{f}_S \quad \text{en } \Omega_S, \\ \mathbf{T}_S &= \mathbf{T}_S^t \quad \text{en } \Omega_S, & \text{y } \mathbf{u}_S &= \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Gamma_S. \end{aligned} \quad (2.5)$$

En el medio poroso Ω_D consideraremos el modelo de Darcy:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_D &= -\nabla p_D + \mathbf{f}_D \quad \text{en } \Omega_D, \\ \mathbf{div} \mathbf{u}_D &= 0 \quad \text{en } \Omega_D, & \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_D \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde \mathbf{u}_D es la velocidad y p_D es la presión. La función matricial con valores en los reales \mathbf{K} que describe la permeabilidad de Ω_D dividida por la viscosidad ν , satisface $\mathbf{K}^t = \mathbf{K}$, además $\mathbf{K} \in L^\infty(\Omega_D)$ y es uniformemente elíptica, esto es, existe $C > 0$, tal que

$$\alpha \cdot \mathbf{K}(x)\alpha \geq C_{\mathbf{K}}\|\alpha\|^2, \quad (2.7)$$

para casi todo $x \in \Omega_D$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Finalmente \mathbf{f}_D es una fuerza externa dada, que representa la gravedad.

Concluimos la descripción del sistema acoplado introduciendo las condiciones de transmisión en la interfase Σ :

$$\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n} \quad \text{sobre } \Sigma \quad (2.8)$$

y

$$\boldsymbol{\sigma}_S \mathbf{n} + \sum_{l=1}^{n-1} w_l (\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{t}_l) \mathbf{t}_l = -p_D \mathbf{n} \quad \text{sobre } \Sigma. \quad (2.9)$$

Donde el conjunto $\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$ representa las constantes de fricción positivas, que son determinadas experimentalmente. La condición (2.8) corresponde a la ley de conservación de masas sobre Σ . mientras que (2.9) puede ser descompuesta en sus componentes normal y tangencial, como sigue:

$$(\boldsymbol{\sigma}_S \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = -p_D \quad \text{y} \quad (\boldsymbol{\sigma}_S \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t}_l = -w_l (\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{t}_l), \quad l = 1, \dots, n-1. \quad (2.10)$$

La primera condición en (2.10) corresponde al balance de las fuerzas normales, mientras que la segunda condición es conocida como la ley de Beavers-Joseph-Saffman, la cual establece que la velocidad de deslizamiento es proporcional al esfuerzo de corte a lo largo de Σ (asumiendo también, basándonos en evidencia experimental, que $\mathbf{u}_D \cdot \mathbf{t}_l$, $l = 1, \dots, n-1$ es despreciable). Para más detalles sobre la condición de interfase, nos referimos a [2, 29, 32].

Notar que la ecuación (2.9) puede ser reescrita en términos del tensor \mathbf{T}_S como

$$\mathbf{T}_S \mathbf{n} = -\rho(\mathbf{u}_S \otimes \mathbf{u}_S) \mathbf{n} - \sum_{l=1}^{n-1} w_l (\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{t}_l) \mathbf{t}_l - p_D \mathbf{n} \quad \text{sobre } \Sigma, \quad (2.11)$$

la cual emplearemos en lugar de (2.9).

2.2. Problema continuo

En esta sección se presentará la formulación mixta aumentada de nuestro problema y se abordará su resolución.

2.2.1. El problema variacional mixto aumentado

En lo que sigue obtendremos la formulación variacional de nuestro problema modelo basado en ecuaciones (2.5),(2.6), (2.8) y (2.11). Para hacerlo, introduciremos los siguientes espacios de Hilbert

$$\mathbf{H}_{\Gamma_S}^1(\Omega_S) := \{\mathbf{v}_S \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) \mid \mathbf{v}_S|_{\Gamma_S} := \mathbf{0}\},$$

$$\mathbf{H}_{\Gamma_D}(\text{div}, \Omega_D) := \{\mathbf{v}_D \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega_D) : \mathbf{v}_D \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \in \Gamma_D\},$$

y las identidades

$$\mathbf{T}^d : \mathbf{R} = \mathbf{T}^d : \mathbf{R}^d \quad \text{y} \quad (\boldsymbol{\omega}(\mathbf{u}), \mathbf{R})_\Omega = \frac{1}{2}(\text{curl}(\mathbf{u}), \text{as}(\mathbf{R}))_\Omega, \quad (2.12)$$

con

$$\text{curl}(\mathbf{v}) := \begin{cases} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \text{en } \mathbb{R}^2, \\ \nabla \times \mathbf{v} := \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & \text{en } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S)$, y para todo $\mathbf{T}, \mathbf{R} \in \mathbb{L}(\Omega_S)$, con

y

$$\text{as}(\mathbf{R}) := \begin{cases} R_{21} - R_{12} & \text{en } \mathbb{R}^2, \\ (R_{32} - R_{23}, R_{13} - R_{31}, R_{21} - R_{12}) & \text{en } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Adicionalmente, dado $\star \in \{S, D\}$, en lo que sigue usaremos la notación :

$$(u, v)_\star := \int_{\Omega_\star} uv, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_\star} := \int_{\Omega_\star} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\Omega_\star} := \int_{\Omega_\star} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}.$$

En primer lugar, para las ecuaciones (2.5) procedemos análogamente a [6]. Más precisamente multiplicamos la primera y la segunda ecuación de (2.5) por las funciones test $\mathbf{R}_S \in \mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega_S)$ y $\mathbf{v}_S \in \mathbf{H}_{\Gamma_S}^1(\Omega_S)$, respectivamente, y luego procedemos integrando por partes, una vez para la ecuación multiplicada por \mathbf{R}_S y dos veces para la multiplicada por \mathbf{v}_S . De esta forma utilizando la condición de contorno Dirichlet $\mathbf{u}_S = \mathbf{0}$ sobre Γ_S y la condición de interfase (2.11), y haciendo uso de la identidad $\langle (\mathbf{u} \otimes \mathbf{w})\mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_\Sigma = \langle \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rangle_\Sigma$, obtenemos

$$\begin{aligned} & (\mathbf{T}_S^d, \mathbf{R}_S^d)_{\Omega_S} + 2\nu(\mathbf{u}_S, \mathbf{div} \mathbf{R}_S)_{\Omega_S} + \nu(\text{curl}(\mathbf{u}_S), \text{as}(\mathbf{R}_S))_{\Omega_S} \\ & + \rho((\mathbf{u}_S \otimes \mathbf{u}_S)^d, \mathbf{R}_S)_{\Omega_S} - 2\nu \langle \mathbf{R}_S \mathbf{n}, \mathbf{u}_S \rangle_\Sigma = 0 \quad \forall \mathbf{R}_S \in \mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega_S) \end{aligned} \quad (2.13)$$

y

$$\begin{aligned} & -2\nu(\mathbf{div} \mathbf{T}_S, \mathbf{v}_S)_{\Omega_S} + 2\nu \langle \mathbf{T}_S \mathbf{n}, \mathbf{v}_S \rangle_\Sigma - \nu(\text{as}(\mathbf{T}_S), \text{curl}(\mathbf{v}_S))_{\Omega_S} + \langle \mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n}, \mathbf{u}_S \cdot \mathbf{v}_S \rangle_\Sigma \\ & + 2\nu \sum_{l=1}^{n-1} w_l \langle (\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{t}_l) \mathbf{t}_l, \mathbf{v}_S \rangle_\Sigma + 2\nu \langle \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n}, \lambda \rangle_\Sigma = 2\nu(\mathbf{f}_S, \mathbf{v}_S)_{\Omega_S} \quad \forall \mathbf{v}_S \in \mathbf{H}_{\Gamma_S}^1(\Omega_S) \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde $\lambda := p_D|_\Sigma \in H^{1/2}(\Sigma)$ es introducida como una incógnita adicional.

Por otro lado, para las ecuaciones (2.6) procederemos análogamente a [14, 22] para obtener

$$\begin{aligned} & 2\nu(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_D, \mathbf{v}_D)_{\Omega_D} - 2\nu(\text{div} \mathbf{v}_D, p_D)_{\Omega_D} - 2\nu \langle \mathbf{v}_D \cdot \mathbf{n}, \lambda \rangle_\Sigma \\ & = 2\nu(\mathbf{f}_D, \mathbf{v}_D)_{\Omega_D} \quad \forall \mathbf{v}_D \in \mathbf{H}_{\Gamma_D}(\text{div}; \Omega_D) \end{aligned} \quad (2.15)$$

y

$$2\nu(\text{div} \mathbf{u}_D, q_D) = 0 \quad \forall q_D \text{ en } L^2(\Omega_D) \quad (2.16)$$

mientras la primera ecuación de (2.11) se impone débilmente como

$$2\nu \langle \mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n}, \xi \rangle_\Sigma - 2\nu \langle \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}, \xi \rangle_\Sigma = 0 \quad \forall \xi \in H^{1/2}(\Sigma). \quad (2.17)$$

Además, con el fin de analizar convenientemente el problema que se presentará a lo largo de esta sección, multiplicaremos intencionalmente las ecuaciones (2.14)–(2.17) por 2ν . Finalmente, con el fin de que el análisis subsiguiente sea adecuado, y análogamente a [8], se añadirán los siguientes términos redundantes derivados de las ecuaciones de equilibrio

$$\kappa_1 (\mathbf{div} \mathbf{T}_S + \mathbf{f}_S, \mathbf{div} \mathbf{R}_S)_{\Omega_S} = 0 \quad \forall \mathbf{R}_S \in \mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega_S), \quad (2.18)$$

y

$$\kappa_2 \left(\mathbf{T}_S^d - 2\nu \mathbf{e}(\mathbf{u}_S) + (\mathbf{u}_S \otimes \mathbf{u}_S)^d, \mathbf{e}(\mathbf{v}_S) \right)_\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{v}_S \in \mathbf{H}_{\Gamma_S}^1(\Omega_S) \quad (2.19)$$

respectivamente, donde κ_1 and κ_2 son parámetros positivos que se especificarán a lo largo de este documento. De esta manera, en primera instancia se tiene el siguiente problema variacional: Hallar

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_S, \mathbf{u}_S, \mathbf{u}_D) & \text{ en } \mathbb{H}(\mathbf{div}, \Omega_S) \times \mathbf{H}_{\Gamma_S}^1(\Omega_S) \times \mathbf{H}_{\Gamma_D}(\mathbf{div}, \Omega_D), \\ (p_D, \lambda) & \text{ en } L^2(\Omega_D) \times H^{1/2}(\Sigma), \end{aligned}$$

tal que las ecuaciones (2.13)–(2.19) se satisfacen.

Ahora, notar que si $((\mathbf{T}_S, \mathbf{u}_S, \mathbf{u}_D), (p_D, \lambda)) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Q}$ satisface (2.13) – (2.19), entonces, luego de algunos cálculos simples es fácil mostrar que para todo $c \in \mathbb{R}$ $((\mathbf{T}_S - c\mathbf{I}, \mathbf{u}_S, \mathbf{u}_D), (p_D + c, \lambda + c))$ también satisface (2.13)–(2.19), y consecuentemente, la unicidad de la solución del problema acoplado falla. Entonces para superar este inconveniente a partir de ahora restringimos el espacio donde esta definida la presión de Darcy a $L_0^2(\Omega_D)$, con

$$L_0^2(\Omega_D) = \left\{ q \in L^2(\Omega_D) : \int_{\Omega_D} q = 0 \right\}.$$

Además, recordando la siguiente descomposición

$$\mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega_S) = \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega_S) \oplus P_0(\Omega_S) \mathbf{I}, \quad (2.20)$$

donde

$$\mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega_S) := \left\{ \mathbf{R}_S \in \mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega_S) : \int_{\Omega_S} \text{tr } \mathbf{R}_S = 0 \right\}, \quad (2.21)$$

redefinimos el tensor de pseudoestrés \mathbf{T}_S como

$$\mathbf{T}_S + \mu \mathbf{I} \quad \text{con las nuevas incógnitas} \quad \mathbf{T}_S \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega_S) \quad \text{y} \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

De donde (2.14) se convierte

$$\begin{aligned} -2\mu (\mathbf{div } \mathbf{T}_S, \mathbf{v}_S)_{\Omega_S} + 2\nu \langle \mathbf{T}_S, \mathbf{v}_S \rangle_\Sigma + 2\nu \mu \langle \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_\Sigma - \mu (\text{curl } (\mathbf{v}_S), \text{as}(\mathbf{T}_S))_{\Omega_S} + \\ 2\nu \rho \langle \mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n}, \mathbf{u}_S \cdot \mathbf{v}_S \rangle_\Sigma + \sum_{l=1}^{n-1} 2\nu w_l \langle (\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{t}_l), \mathbf{v}_S \rangle_\Sigma \quad (2.22) \\ + 2\nu \langle \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n}, \lambda \rangle_\Sigma = 2\nu (\mathbf{f}_S, \mathbf{v}_S)_{\Omega_S} \quad \forall \mathbf{v}_S \in \mathbf{H}_{\Gamma_S}^1(\Omega_S) \end{aligned}$$

Ahora, descomponiendo la función test \mathbf{R}_S de (2.13) de acuerdo a (2.20), obtenemos

$$\begin{aligned} & (\mathbf{T}_S^d, \mathbf{R}_S^d)_{\Omega_S} + 2\nu(\mathbf{u}_S, \mathbf{div} \mathbf{R}_S)_{\Omega_S} + \nu(\text{curl}(\mathbf{u}_S), \text{as}(\mathbf{R}_S))_{\Omega_S} \\ & + \rho((\mathbf{u}_S \otimes \mathbf{u}_S)^d, \mathbf{R}_S)_{\Omega_S} - \langle \mathbf{R}_S, \mathbf{u}_S \rangle_{\Sigma} = 0 \quad \forall \mathbf{R}_S \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}, \Omega_S), \end{aligned} \quad (2.23)$$

y

$$-2\nu\eta\langle \mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Sigma} = 0 \quad \forall \eta \in \mathbb{R}$$

De esta manera, reemplazando (2.13) y (2.14) por (2.23) y (2.22), respectivamente, al final nuestro sistema variacional acoplado se declara como: Hallar $(\mathbf{T}_S, \mathbf{u}_S, \mathbf{u}_D) \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}, \Omega_S) \times \mathbf{H}_{\Gamma_S}^1(\Omega_S) \times \mathbf{H}_{\Gamma_D}(\mathbf{div}, \Omega_D)$ y $(p_D, \lambda, \mu) \in L_0^2(\Omega_D) \times H^{1/2}(\Sigma) \times \mathbb{R}$ tal que (2.15)–(2.19), (2.23) y (2.22) se cumplen. Más aún, mostraremos a continuación que puede ser reescrito en términos de formas y funcionales adecuadas. De echo agruparemos las incógnitas y los espacios como sigue

$$\begin{aligned} \underline{\Phi} & := (\mathbf{T}_S, \mathbf{u}_S, \mathbf{u}_D) \in \mathbf{X} := \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega_S) \times \mathbf{H}_{\Gamma_S}^1(\Omega_S) \times \mathbf{H}_{\Gamma_D}(\mathbf{div}; \Omega_D) \\ \underline{\mathbf{p}} & := (p_D, \lambda, \mu) \in \mathbf{Q} := L_0^2(\Omega_D) \times H^{1/2}(\Sigma) \times \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Donde \mathbf{X} y \mathbf{Q} están dotados con las normas $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}^2 := \|\cdot\|_{\mathbf{div}; \Omega_S}^2 + \|\cdot\|_{1, \Omega_S}^2 + \|\cdot\|_{\mathbf{div}; \Omega_D}^2$ y $\|\cdot\|_{\mathbf{Q}}^2 := \|\cdot\|_{0; \Omega_D}^2 + \|\cdot\|_{1/2, \Sigma}^2 + |\cdot|$. Adicionalmente, dado $\mathbf{w}_S \in \mathbf{H}_{\Gamma_S}(\Omega_S)$, se definen las formas

$$\mathbf{A}_{\mathbf{w}_S}(\underline{\Phi}, \underline{\Psi}) := \mathbf{A}_S((\mathbf{T}_S, \mathbf{v}_S), (\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S)) + \mathbf{C}_{\mathbf{w}_S}((\mathbf{T}_S, \mathbf{v}_S), (\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S)) + \mathbf{A}_D(\mathbf{u}_D, \mathbf{v}_D), \quad (2.25)$$

y

$$\mathbf{B}(\underline{\Psi}, \underline{\mathbf{q}}) := -2\nu(q_D, \mathbf{div} \mathbf{v}_D)_{\Omega_D} + 2\nu\langle \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_D \cdot \mathbf{n}, \xi \rangle_{\Sigma} + 2\nu\eta\langle \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Sigma}, \quad (2.26)$$

para todo $\underline{\Phi} = (\mathbf{T}_S, \mathbf{u}_S, \mathbf{u}_D)$, $\underline{\Psi} = (\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S, \mathbf{v}_D) \in \mathbf{X}$ y $\underline{\mathbf{q}} = (q_D, \xi, \eta) \in \mathbf{Q}$, donde \mathbf{A}_S , $\mathbf{C}_{\mathbf{w}_S}$ y \mathbf{A}_D son a su vez las formas bilineales (y trilineales) dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_S((\mathbf{T}_S, \mathbf{u}_S), (\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S)) & := (\mathbf{T}_S^d, \mathbf{R}_S^d)_{\Omega_S} + 2\nu(\mathbf{u}_S, \mathbf{div} \mathbf{R}_S)_{\Omega_S} - 2\nu(\mathbf{v}_S, \mathbf{div} \mathbf{T}_S)_{\Omega_S} \\ & + \nu(\text{curl}(\mathbf{u}_S), \text{as}(\mathbf{R}_S))_{\Omega_S} - \nu(\text{curl}(\mathbf{v}_S), \text{as}(\mathbf{T}_S))_{\Omega_S} - 2\nu\langle \mathbf{R}_S \mathbf{n}, \mathbf{u}_S \rangle_{\Sigma} + 2\nu\langle \mathbf{T}_S \mathbf{n}, \mathbf{v}_S \rangle_{\Sigma} \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$+ \kappa_1(\mathbf{div} \mathbf{T}_S, \mathbf{div} \mathbf{R}_S)_{\Omega_S} - \kappa_2(\mathbf{T}_S^d - 2\nu\mathbf{e}(\mathbf{u}_S), \mathbf{e}(\mathbf{v}_S))_{\Omega_S} + 2\nu \sum_{l=1}^{n-1} w_l \langle \mathbf{u}_S \cdot \mathbf{t}_l, \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{t}_l \rangle_{\Sigma}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbf{w}_S}((\mathbf{T}_S, \mathbf{u}_S), (\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S)) & := \rho((\mathbf{w}_S \otimes \mathbf{u}_S)^d, \mathbf{R}_S)_{\Omega_S} + 2\nu\langle \mathbf{w}_S \cdot \mathbf{n}, \mathbf{u}_S \cdot \mathbf{v}_S \rangle_{\Sigma} \\ & + \kappa_2((\mathbf{w}_S \otimes \mathbf{u}_S)^d, \mathbf{e}(\mathbf{v}_S))_{\Omega_S}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

y

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{u}_D, \mathbf{v}_D) := (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_D, \mathbf{v}_D)_{\Omega_D}, \quad (2.29)$$

Adicionalmente, se define el funcional $\mathbf{F} \in \mathbf{X}'$

$$\mathbf{F}(\underline{\Psi}) := -2\nu(\mathbf{f}_S, \mathbf{v}_S)_{\Omega_S} + 2\nu(\mathbf{f}_D, \mathbf{v}_D)_{\Omega_D} - \kappa_1(\mathbf{f}_S, \operatorname{div} \mathbf{R}_S)_{\Omega_S} \quad \forall \underline{\Psi} = (\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S, \mathbf{v}_D), \quad (2.30)$$

para todo $\underline{\Psi} = (\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S, \mathbf{v}_D) \in \mathbf{X}$. Consecuentemente se llega al sistema acoplado: Hallar $(\underline{\Phi}, \underline{\mathbf{p}}) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Q}$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{u}_S}(\underline{\Phi}, \underline{\Psi}) + \mathbf{B}(\underline{\Psi}, \underline{\mathbf{p}}) &= \mathbf{F}(\underline{\Psi}) & \forall \underline{\Psi} \in \mathbf{X}, \\ \mathbf{B}(\underline{\Phi}, \underline{\mathbf{q}}) &= 0 & \forall \underline{\mathbf{q}} \in \mathbf{Q}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

2.2.2. Análisis del problema continuo

Definamos la función

$$\mathcal{J} : \mathbf{M} \subseteq \mathbf{H}_{\Gamma_S}^1(\Omega_S) \rightarrow \mathbf{H}_{\Gamma_S}^1(\Omega_S), \quad \mathbf{w}_S \rightarrow \mathcal{J}(\mathbf{w}_S) = \mathbf{u}_S, \quad (2.32)$$

donde $\mathbf{u}_S \in \mathbf{H}_{\Gamma_S}^1(\Omega_S)$ es la segunda componente de $\underline{\Phi} \in \mathbf{X}$, la cual, junto con $\underline{\mathbf{p}} \in \mathbf{Q}$ constituyen la única solución de la versión linealizada del problema (2.31): Hallar $(\underline{\Phi}, \underline{\mathbf{p}}) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Q}$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{w}_S}(\underline{\Phi}, \underline{\Psi}) + \mathbf{B}(\underline{\Psi}, \underline{\mathbf{p}}) &= \mathbf{F}(\underline{\Psi}) & \forall \underline{\Psi} \in \mathbf{X}, \\ \mathbf{B}(\underline{\Phi}, \underline{\mathbf{q}}) &= 0 & \forall \underline{\mathbf{q}} \in \mathbf{Q}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

y \mathbf{M} es un conjunto acotado, que garantiza que el operador \mathcal{J} este bien definido (será especificado a lo largo de esta sección). Entonces, notando que $(\underline{\Phi}, \underline{\mathbf{p}}) = ((\mathbf{T}_S, \mathbf{u}_S, \mathbf{u}_D), (p_D, \lambda, \mu)) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Q}$ es solución de (2.31) si y solamente si $\mathbf{u}_S \in \mathbf{H}_{\Gamma_S}^1(\Omega_S)$ es solución del problema del punto fijo: Hallar $\mathbf{u}_S \in \mathbf{M}$, tal que

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}_S) = \mathbf{u}_S, \quad (2.34)$$

De esto podemos inferir claramente que, para probar que el sistema (2.31) esta bien puesto es suficiente probar que el problema (2.34) tiene solución única. Antes de la unicidad del problema (2.34), se probará que el operador \mathcal{J} esta bien definido. La siguiente sección esta completamente dedicada a este asunto.

\mathcal{J} es un operador bien definido

De acuerdo a la estructura mixta del problema linealizado (2.33), en lo que sigue aplicaremos la teoría de Babuška-Brezzi para probar que el sistema (2.33) tiene única solución, o equivalentemente que el operador \mathcal{J} este bien definido. Comenzaremos estableciendo la continuidad del funcional \mathbf{F} y de las formas bilineales \mathbf{A}_S , \mathbf{A}_D y \mathbf{B} :

$$|\mathbf{F}(\underline{\Psi})| \leq \left((4\nu^2 + \kappa_1^2)^{1/2} \|\mathbf{f}_S\|_{0,\Omega_S} + 2\nu \|\mathbf{f}_D\|_{0,\Omega_D} \right) \|\underline{\Psi}\|_{\mathbf{X}}, \quad (2.35)$$

$$|\mathbf{A}_S((\mathbf{T}_S, \mathbf{u}_S), (\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S))| \leq C_{S,1} \|(\mathbf{T}_S, \mathbf{u}_S)\| \|(\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S)\|, \quad (2.36)$$

$$|\mathbf{A}_D(\mathbf{u}_D, \mathbf{v}_D)| \leq C_D \|\mathbf{u}_D\|_{\text{div}, \Omega_D} \|\mathbf{v}_D\|_{\text{div}, \Omega_D} \quad (2.37)$$

y

$$|\mathbf{B}(\underline{\Phi}, \underline{\mathbf{q}})| \leq C_B \|\underline{\Phi}\|_{\mathbf{X}} \|\underline{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{Q}}, \quad (2.38)$$

para todo $\underline{\Phi} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{T}_S, \mathbf{R}_S \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega_S)$, $\mathbf{u}_S, \mathbf{v}_S \in \mathbf{H}_{\Gamma_S}^1(\Omega_S)$ y $(\underline{\Phi}, \underline{\mathbf{q}}) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Q}$, con $C_{S,1}, C_D, C_B > 0$. Notar que la demostración de las estimaciones previas es directa.

Ahora, dado $\mathbf{w}_S \in \mathbf{H}_{\Gamma_S}^1(\Omega_S)$, de la continuidad de las incrustaciones $\mathbf{i}_\Sigma : \mathbf{H}^{1/2}(\Sigma) \rightarrow \mathbf{L}^4(\Sigma)$ y $\mathbf{i}_S : \mathbf{H}^1(\Omega_S) \rightarrow \mathbf{L}^4(\Omega_S)$, y la continuidad del operador traza $\gamma_S : \mathbf{H}^1(\Omega_S) \rightarrow \mathbf{L}^2(\partial\Omega_S)$, obtenemos que existe $C_{S,2} > 0$, tal que

$$|\mathbf{C}_{\mathbf{w}_S}((\mathbf{T}_S, \mathbf{u}_S), (\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S))| \leq C_{S,2} \|\mathbf{w}_S\|_{1,\Omega_S} \|(\mathbf{T}_S, \mathbf{u}_S)\| \|(\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S)\|, \quad (2.39)$$

para todo $\mathbf{T}_S, \mathbf{R}_S \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega_S)$ y $\mathbf{u}_S, \mathbf{v}_S \in \mathbf{H}_{\Gamma_S}^1(\Omega_S)$, con $C_{S,2} = \|\mathbf{i}_S\|^2 (\rho^2 + \kappa_2^2)^{1/2} + 2\nu \|\mathbf{i}_\Sigma\|^2 \|\gamma_S\|$. En particular, de (2.36) y (2.39) se deduce que, para $\mathbf{w}_S \in \mathbf{H}_{\Omega_S}^1(\Omega_S)$ fijo, $\mathbf{A}_{\mathbf{w}_S}$ (cf. (2.25)) es una forma bilineal continua, esto es

$$|\mathbf{A}_{\mathbf{w}_S}(\underline{\Phi}, \underline{\Psi})| \leq (C_A + C_{S,2} \|\mathbf{w}_S\|_{1,\Omega_S}) \|\underline{\Phi}\|_{\mathbf{X}} \|\underline{\Psi}\|_{\mathbf{X}} \quad \forall \underline{\Phi}, \underline{\Psi} \in \mathbf{X}, \quad (2.40)$$

con $C_A > 0$. Definamos el subespacio

$$\mathbf{V} := \{ \underline{\Psi} \in \mathbf{X} : \mathbf{B}(\underline{\Psi}, \underline{\mathbf{q}}) := 0 \quad \forall \underline{\mathbf{q}} = (q_D, \xi, \eta) \in \mathbf{Q} \}. \quad (2.41)$$

De la definición de \mathbf{B} (cf. (2.26)), se sigue que $\underline{\Psi} = (\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S, \mathbf{v}_D) \in \mathbf{V}$, si y sólo si ,

$$\begin{aligned} (\text{div } \mathbf{v}_D, q_D)_{\Omega_D} &= 0 \quad \forall q_D \in L_0^2(\Omega_D), & \langle \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_\Sigma &= 0, \\ & & \text{y } \langle \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_D \cdot \mathbf{n}, \xi \rangle_\Sigma &= 0 \quad \forall \xi \in H^{1/2}(\Sigma). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Entonces, recordando que $L^2(\Omega_D) = L_0^2(\Omega_D) \oplus \mathbb{R}$, y notando que de la segunda y tercera ecuación de (2.42) se tiene que $\langle \mathbf{v}_D \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_\Sigma = \int_{\Omega_D} \operatorname{div} \mathbf{v}_D = 0$, y concluimos junto a la primera ecuación de (2.42) que

$$(\operatorname{div} \mathbf{v}_D, q_D) = 0 \quad \forall q_D \in L^2(\Omega_D).$$

Consecuentemente, podemos reescribir el subespacio \mathbf{V} de la siguiente forma

$$\mathbf{V} := \left\{ \underline{\Psi} = (\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S, \mathbf{v}_D) \in \mathbf{X} : \operatorname{div} \mathbf{v}_D = 0 \quad \text{en } \Omega_D, \quad \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_D \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Sigma \right. \\ \left. \text{y } \langle \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_\Sigma = 0 \right\}.$$

Ahora, abordaremos la elipticidad de $\mathbf{A}_{\mathbf{w}_S}$ sobre \mathbf{V} para valores apropiados de $\mathbf{w}_S \in \mathbf{H}_{\Gamma_S}^1(\Omega_S)$.

Lema 2.2.1 *Asumir que $\kappa_1 > 0$ y $0 < \kappa_2 < 4\nu$ y sea $\mathbf{w}_S \in \mathbf{H}_{\Gamma_S}^1(\Omega_S)$, tal que*

$$\|\mathbf{w}_S\|_{1, \Omega_S} \leq \frac{\alpha}{C_{S,2}}, \quad (2.43)$$

donde $\alpha = \frac{1}{2} \min\{\alpha_S, C_{\mathbf{K}}\}$ con $C_{\mathbf{K}}$ y $C_{S,2}$ constantes que satisfacen (2.7), (2.39), respectivamente, y α_S definida más adelante en (2.47). Además asumir que $\kappa_1 > 0$ y $0 < \kappa_2 < 4\nu$. Entonces, se tiene que

$$\mathbf{A}_{\mathbf{w}_S}(\underline{\Psi}, \underline{\Psi}) \geq \alpha \|\underline{\Phi}\|_{\mathbf{X}}, \quad \forall \underline{\Psi} \in \mathbf{V}, \quad (2.44)$$

Demostración. Dado $(\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S, \mathbf{v}_D) \in \mathbf{V}$, antes que nada, recordamos de [Lemma 2.3 en [18]] (o el [capítulo IV, [3]] y [3, 25], respectivamente, que las siguientes identidades se cumplen:

$$C_d \|\mathbf{R}\|_{0, \Omega_S}^2 \leq \|\mathbf{R}^d\|_{0, \Omega_S}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{R}\|_{0, \Omega_S}^2 \quad \forall \mathbf{R}_S \in \mathbb{H}_0(\operatorname{div}; \Omega_S), \quad (2.45)$$

y

$$C_k \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega_S}^2 \leq \|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{0, \Omega_S}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\Gamma_S}^1(\Omega_S), \quad (2.46)$$

con $C_d > 0$ y $C_k > 0$ constantes que sólo dependen de Ω_S . Entonces, usando (2.7) deducimos que:

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_S((\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S), (\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S)) + \mathbf{A}_D(\mathbf{v}_D, \mathbf{v}_D) \\ & \geq \frac{C_d}{2} \min\{\kappa_1, 1\} \|\mathbf{R}_S\|_{\operatorname{div}, \Omega_S}^2 + C_{\mathbf{K}} \|\mathbf{v}_D\|_{0, \Omega_D}^2 + \kappa_2 C_k \left(2\nu - \frac{\kappa_2}{2}\right) \|\mathbf{v}_S\|_{1, \Omega_S}^2 \\ & \geq \alpha_S \|(\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S)\|^2 + C_{\mathbf{K}} \|\mathbf{v}_D\|_{\operatorname{div}, \Omega_D}^2, \end{aligned} \quad (2.47)$$

con

$$\alpha_S = \min \left\{ \frac{C_d}{2} \min\{\kappa_1, 1\}, C_k \kappa_2 \left(2\nu - \frac{\kappa_2}{2}\right) \right\}. \quad (2.48)$$

Entonces, usando esto

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{w}_S}(\underline{\Psi}, \underline{\Psi}) &= \mathbf{A}_S((\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S), (\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S)) + \mathbf{A}_D(\mathbf{v}_D, \mathbf{v}_D) + \mathbf{C}_{\mathbf{w}_S}((\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S), (\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S)), \\ &\geq \mathbf{A}_S((\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S), (\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S)) + \mathbf{A}_D(\mathbf{v}_D, \mathbf{v}_D) - |\mathbf{C}_{\mathbf{w}_S}((\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S), (\mathbf{R}_S, \mathbf{v}_S))|, \end{aligned}$$

de (2.39) y (2.47) y, de las hipótesis sobre los parámetros κ_1 y κ_2 , mediante algunos cálculos sencillos se deduce el resultado. \square

Ahora, nos corresponde establecer la condición inf-sup de \mathbf{B} , y con el fin de deducirla, a continuación se estudiarán las dos siguientes estimaciones.

Lema 2.2.2 *Existe $c_1 > 0$ tal que*

$$S_1(q_D, \xi) := \sup_{\substack{\mathbf{v}_D \in \mathbf{H}_{\Gamma_D}(\text{div}; \Omega_D) \\ \mathbf{v}_D \neq \mathbf{0}}} \frac{(\text{div } \mathbf{v}_D, q_D) + \langle \mathbf{v}_D \cdot \mathbf{n}, \xi \rangle_\Sigma}{\|\mathbf{v}_D\|_{\text{div}; \Omega_D}} \geq c_1 \{\|q_D\|_{0, \Omega_D} + \|\xi\|_{1/2, \Sigma}\}. \quad (2.49)$$

para todo $(q_D, \xi) \in L_0^2(\Omega_D) \times H^{1/2}(\Sigma)$.

Demostración. Ver el lema 3.3 en [23]. \square

Lema 2.2.3 *Existe $c_2, c_3 > 0$, tal que*

$$S_2(\xi, \eta) := \sup_{\substack{\mathbf{v}_S \in \mathbf{H}_{\Gamma_S}(\Omega_S) \\ \mathbf{v}_S \neq \mathbf{0}}} \frac{\langle \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n}, \xi \rangle_\Sigma - \eta \langle \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_\Sigma}{\|\mathbf{v}_S\|_{1, \Omega_S}} \geq c_2 |\eta| - c_3 \|\xi\|_{1/2, \Sigma}, \quad (2.50)$$

para todo $(\xi, \eta) \in H^{1/2}(\Sigma) \times \mathbb{R}$.

Demostración. Procederemos similarmente a las demostraciones de [23, Lema 3.2] y [7, Lema 3.2]. En efecto, sea \mathbf{v}_0 un elemento fijo en $\mathbf{H}_{\Gamma_S}^1(\Omega_S)$ que satisface $\langle \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_\Sigma \neq 0$ (ver la demostración de [7, Lema 3.2] para la construcción de dicho elemento), y observar que para todo $(\xi, b) \in H^{1/2}(\Sigma) \times \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned} S_2(\xi, \eta) &\geq \frac{|\langle \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}, \xi \rangle_\Sigma - \eta \langle \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_\Sigma|}{\|\mathbf{v}_0\|_{1, \Omega_S}} \\ &\geq \frac{|\eta| |\langle \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_\Sigma|}{\|\mathbf{v}_0\|_{1, \Omega_S}} - \frac{|\langle \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}, \xi \rangle_\Sigma|}{\|\mathbf{v}_0\|_{1, \Omega_S}} \geq c_2 |\eta| - c_3 \|\xi\|_{1/2, \Sigma}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

con $c_2 = \frac{|\langle \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_\Sigma|}{\|\mathbf{v}_0\|_{1, \Omega_S}}$ y $c_3 > 0$ la constante que satisface $|\langle \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}, \xi \rangle_\Sigma| \leq c_3 \|\mathbf{v}_0\|_{1, \Omega_S} \|\xi\|_{1/2, \Gamma}$, lo que da el resultado deseado. \square

Empleando los dos lemas previos, ahora nos centraremos en probar la condición inf-sup de \mathbf{B} .

Lema 2.2.4 *Existe $\beta > 0$, tal que*

$$S(\underline{\mathbf{q}}) := \sup_{\substack{\underline{\Psi} \in \mathbf{X} \\ \underline{\Psi} \neq 0}} \frac{\mathbf{B}(\underline{\Psi}, \underline{\mathbf{q}})}{\|\underline{\Psi}\|_{\mathbf{X}}} \geq \beta \|\underline{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{Q}} \quad \forall \underline{\mathbf{q}} \in \mathbf{Q}. \quad (2.52)$$

Demostración. Dado $\underline{\mathbf{q}} = (p_D, \xi, \eta) \in \mathbf{Q}$, de la definición de \mathbf{B} (cf. (2.26)), observamos que

$$S(\underline{\mathbf{q}}) \geq 2\nu S_1(q_D, \xi) \quad \text{y} \quad S(\underline{\mathbf{q}}) \geq 2\nu S_2(\xi, \eta),$$

lo cual junto con los lemas 2.2.2 y 2.2.3, da

$$S(\underline{\mathbf{q}}) \geq 2\nu c_1 \{\|q_D\|_{0, \Omega_D} + \|\xi\|_{1/2, \Sigma}\} \quad \text{y} \quad S(\underline{\mathbf{q}}) \geq 2\nu \{c_2 |\eta| - c_3 \|\xi\|_{1/2, \Sigma}\}.$$

Así, de las últimas estimaciones obtenemos que

$$\left(1 + \frac{c_2}{2c_3}\right) S(\underline{\mathbf{q}}) \geq \nu c_1 \min\left\{1, \frac{c_2}{c_3}\right\} \|\underline{\mathbf{q}}\|_{\mathbf{Q}}, \quad (2.53)$$

lo cual implica el resultado, con $\beta = \nu c_1 \min\{1, \frac{c_2}{c_3}\} \left(1 + \frac{c_2}{2c_3}\right)^{-1}$. \square

Ahora, estamos en condiciones de probar que el sistema (2.33) está bien puesto.

Lema 2.2.5 *Asumir que $\kappa_1 > 0$ y $0 < \kappa_2 < 4\nu$. Entonces, para cada $\mathbf{w}_S \in \mathbf{H}_{\Gamma_S}^1(\Omega_S)$ que satisface (2.43) y cada $\mathbf{f}_S \in \mathbf{L}^2(\Omega_S)$ y $\mathbf{f}_D \in \mathbf{L}^2(\Omega_D)$, existe un único $(\underline{\Phi}, \underline{\mathbf{p}}) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Q}$ solución de (2.33). Adicionalmente, se tiene cumplen las siguientes estimaciones:*

$$\|\underline{\Phi}\|_{\mathbf{X}} \leq \alpha^{-1} \left((4\nu^2 + \kappa_1^2)^{1/2} \|\mathbf{f}_S\|_{0, \Omega_S} + 2\nu \|\mathbf{f}_D\|_{0, \Omega_D} \right), \quad (2.54)$$

y

$$\|\underline{\mathbf{p}}\|_{\mathbf{Q}} \leq \beta^{-1} \left(1 + \alpha^{-1} (C_{\mathbf{A}} + C_{S,2} \|\mathbf{w}_S\|_{1, \Omega_S})\right) \left((4\nu^2 + \kappa_1^2)^{1/2} \|\mathbf{f}_S\|_{0, \Omega_S} + 2\nu \|\mathbf{f}_D\|_{0, \Omega_D} \right). \quad (2.55)$$

Demostración. Gracias a la teoría clásica de Babuška-Brezzi, y como una consecuencia directa de los Lemas 2.2.1 y 2.2.4, podemos concluir que el sistema (2.33) tiene única solución. A su vez, para estimar (2.54) utilizaremos el hecho que $\underline{\Phi} \in \mathbf{V}$ y aplicaremos (2.44) y (2.35),

mientras que (2.55) es una consecuencia directa de la condición inf-sup (2.52) y de las estimaciones (2.35), (2.40) y (2.54). Se omitirán mas detalles al respecto. \square

De acuerdo al lema previo podemos concluir que si escojemos el conjunto \mathbf{M} en (2.32) de tal manera que $\mathbf{M} \subseteq B\left(\mathbf{0}, \frac{\alpha}{C_{S,2}}\right) := \left\{ \mathbf{w}_S \in \mathbf{H}_{\Gamma_S}^1(\Omega_S) : \|\mathbf{w}_S\|_{1,\Omega} \leq \frac{\alpha}{C_{S,2}} \right\}$, entonces el operador \mathcal{J} claramente está bien definido. De ser este el caso, de (2.54) se obtiene que para todo $\mathbf{w}_S \in \mathbf{M}$, se cumple

$$\|\mathcal{J}(\mathbf{w}_S)\|_{1,\Omega_S} = \|\mathbf{u}_S\|_{1,\Omega_S} \leq \|\underline{\Phi}\|_{\mathbf{X}} \leq \alpha^{-1} \left((4\nu^2 + \kappa_1^2)^{1/2} \|\mathbf{f}_S\|_{0,\Omega_S} + 2\nu \|\mathbf{f}_D\|_{0,\Omega_D} \right). \quad (2.56)$$

En particular, si consideramos el conjunto

$$\mathbf{M} := \left\{ \mathbf{w}_S \in \mathbf{H}_{\Gamma_S}^1(\Omega_S) : \|\mathbf{w}_S\|_{1,\Omega_S} \leq \alpha^{-1} \left((4\nu^2 + \kappa_1^2)^{1/2} \|\mathbf{f}_S\|_{0,\Omega_S} + 2\nu \|\mathbf{f}_D\|_{0,\Omega_D} \right) \right\}, \quad (2.57)$$

y asumimos que

$$(4\nu^2 + \kappa_1^2)^{1/2} \|\mathbf{f}_S\|_{0,\Omega_S} + 2\nu \|\mathbf{f}_D\|_{0,\Omega_D} \leq \frac{\alpha^2}{C_{S,2}}, \quad (2.58)$$

Se obtiene fácilmente que $\mathbf{M} \subseteq B\left(\mathbf{0}, \frac{\alpha}{C_{S,2}}\right)$ así \mathcal{J} esta bien definido. Adicionalmente de (2.56) se tiene que

$$\mathcal{J}(\mathbf{M}) \subseteq \mathbf{M}.$$

Por lo tanto, para probar que el sistema (2.31) tiene única solución, en lo que sigue consideraremos \mathbf{M} definido como en (2.57) y probaremos equivalentemente que \mathcal{J} tiene un único punto fijo en \mathbf{M} por medio del teorema del punto fijo de Banach, asegurando que los datos cumplen con la condición (2.58).

Unicidad de la solución

A continuación presentaremos el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.2.6 *Sea $\mathbf{f}_S \in L^2(\Omega_S)$ y $\mathbf{f}_D \in L^2(\Omega_D)$ tal que*

$$\frac{C_{S,2}}{\alpha^2} \left((4\nu^2 + \kappa_1^2)^{1/2} \|\mathbf{f}_S\|_{0,\Omega_S} + 2\nu \|\mathbf{f}_D\|_{0,\Omega_D} \right) < 1 \quad (2.59)$$

Entonces, el operador \mathcal{J} tiene un único punto fijo \mathbf{u}_S en \mathbf{M} . Equivalentemente, el problema acoplado (2.31) tiene única solución $(\underline{\Phi}, \underline{\mathbf{p}}) = ((\mathbf{T}_S, \mathbf{u}_S, \mathbf{u}_D), (p_D, \lambda, \mu)) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Q}$, con $\mathbf{u}_S \in \mathbf{M}$.

Además, se cumple la siguiente estimación a priori

$$\begin{aligned} \|\underline{\Phi}\|_{\mathbf{X}} &\leq \alpha^{-1} \left((4\nu^2 + \kappa_1^2)^{1/2} \|\mathbf{f}_S\|_{0,\Omega_S} + 2\nu \|\mathbf{f}_D\|_{0,\Omega_D} \right), \\ \|\underline{\mathbf{p}}\|_{\mathbf{Q}} &\leq \beta^{-1} (1 + \alpha^{-1} C_{\mathbf{A}} + C_{S,2}) \left((4\nu^2 + \kappa_1^2)^{1/2} \|\mathbf{f}_S\|_{0,\Omega_S} + 2\nu \|\mathbf{f}_D\|_{0,\Omega_D} \right). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Demostración. Comenzaremos notando que el supuesto (2.59) claramente implica (2.58) lo que asegura que el operador \mathcal{J} este bien definido.

Sea $\mathbf{z}_{S,1}$, $\mathbf{z}_{S,2}$, $\mathbf{u}_{S,1}$ y $\mathbf{u}_{S,2}$ en \mathbf{M} , tal que $\mathbf{u}_{S,i} := \mathcal{J}(\mathbf{z}_{S,i})$, $i \in \{1, 2\}$. De acuerdo a la definición de \mathcal{J} (cf. (2.32)) se tiene que para cada $i \in \{1, 2\}$ existe $(\underline{\Phi}_i, \underline{\mathbf{p}}_i) = ((\mathbf{T}_{S,i}, \mathbf{u}_{S,i}, \mathbf{u}_{D,i}), (p_{D,i}, \lambda_i, \mu_i)) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Q}$, tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{z}_{S,i}}(\underline{\Phi}_i, \underline{\Psi}) + \mathbf{B}(\underline{\Psi}, \underline{\mathbf{p}}_i) &= \mathbf{F}(\underline{\Psi}) \quad \forall \underline{\Psi} \in \mathbf{X}, \\ \mathbf{B}(\underline{\Phi}_i, \underline{\mathbf{q}}) &= 0 \quad \forall \underline{\mathbf{q}} \in \mathbf{Q}, \end{aligned}$$

a partir de lo cual

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{z}_{S,1}}(\underline{\Phi}_1, \underline{\Psi}) - \mathbf{A}_{\mathbf{z}_{S,2}}(\underline{\Phi}_2, \underline{\Psi}) + \mathbf{B}(\underline{\Psi}, \underline{\mathbf{p}}_1 - \underline{\mathbf{p}}_2) &= 0 \quad \forall \underline{\Psi} \in \mathbf{X}, \\ \mathbf{B}(\underline{\Phi}_1 - \underline{\Phi}_2, \underline{\mathbf{q}}) &= 0 \quad \forall \underline{\mathbf{q}} \in \mathbf{Q}. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Entonces, notando que $\underline{\Phi}_1 - \underline{\Phi}_2 \in \mathbf{V}$, de la primera ecuación de (2.61) con $\underline{\Psi} = \underline{\Phi}_1 - \underline{\Phi}_2$ y luego de algunos calculos sencillos, se deduce que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{z}_{S,1}}(\underline{\Phi}_1 - \underline{\Phi}_2, \underline{\Phi}_1 - \underline{\Phi}_2) &= -\mathbf{A}_{\mathbf{z}_{S,1} - \mathbf{z}_{S,2}}(\underline{\Phi}_2, \underline{\Phi}_1 - \underline{\Phi}_2) \\ &= \mathbf{C}_{\mathbf{z}_{S,1} - \mathbf{z}_{S,2}}((\mathbf{T}_{S,2}, \mathbf{u}_{S,2}), (\mathbf{T}_{S,1} - \mathbf{T}_{S,2}, \mathbf{u}_{S,1} - \mathbf{u}_{S,2})), \end{aligned}$$

lo cual junto a (2.44) y (2.40), implica

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_{S,1} - \mathbf{u}_{S,2}\|_{1,\Omega} &\leq \|\underline{\Phi}_1 - \underline{\Phi}_2\|_{\mathbf{X}} \leq \alpha^{-1} C_{S,2} \|\mathbf{z}_{S,1} - \mathbf{z}_{S,2}\|_{1,\Omega_S} \|(\mathbf{T}_{S,2}, \mathbf{u}_{S,2})\| \\ &\leq \alpha^{-1} C_{S,2} \|\underline{\Phi}_2\|_{\mathbf{X}} \|\mathbf{z}_{S,1} - \mathbf{z}_{S,2}\|_{1,\Omega_S}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, recordando que $\underline{\Phi}_2$ satisface (2.54), de (2.59) se obtiene que \mathcal{J} es una contracción. Así, por una aplicación directa del teorema del punto fijo de Banach, se tiene que el problema (2.34) tiene única solución, o equivalentemente, el problema (2.31) esta bien puesto.

Ahora, sea $(\underline{\Phi}, \underline{\mathbf{p}}) = ((\mathbf{T}_S, \mathbf{u}_S, \mathbf{u}_D), (p_D, \lambda, \mu)) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Q}$ la única solución de (2.31), con $\mathbf{u}_S \in \mathbf{M}$ satisfying (2.34). Entonces, es claro que $(\underline{\Phi}, \underline{\mathbf{p}})$ satisface (2.33) con $\mathbf{w}_S = \mathbf{u}_S$. Por lo tanto, notando que la estimación (2.58) implica $\|\mathbf{u}_S\|_{1,\Omega_S} \leq \frac{\alpha}{C_{S,2}}$, de (2.54) y (2.55) claramente se obtiene que (2.60), lo que concluye la demostración. \square

2.3. Esquema de Galerkin

En esta sección introduciremos el esquema de Galerkin del problema (2.31) y proporcionaremos condiciones suficientes sobre los correspondientes espacios finito-dimensionales que

garantizan la estabilidad del problema, así como la unicidad de la solución y la estimación de Cía.

2.3.1. Problema Discreto

Consideremos los siguientes subespacios de elementos finitos genéricos.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_h(\Omega_S) &\subseteq \mathbf{H}(\text{div}; \Omega_S), & \mathbf{H}_h(\Omega_D) &\subseteq \mathbf{H}(\text{div}; \Omega_D), & \mathbf{H}_h^1(\Omega_S) &\subseteq \mathbf{H}^1(\Omega_S), \\ L_h(\Omega_D) &\subseteq L^2(\Omega_D) & \text{y} & & \Lambda_h(\Sigma) &\subseteq H^{1/2}(\Sigma), \end{aligned} \quad (2.62)$$

y sea

$$\mathbb{H}_h(\Omega_S) := \{ \mathbf{R}_h \in \mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega_S) : \mathbf{c}^t \mathbf{R}_h \in \mathbf{H}_h(\text{div}; \Omega_S) \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \}.$$

Entonces, definiendo los espacios de elementos finitos globales como

$$\mathbf{X}_h := \mathbb{H}_{h,0}(\Omega_S) \times \mathbf{H}_{h,\Gamma_S}^1(\Omega_S) \times \mathbf{H}_{h,\Gamma_D}(\Omega_D) \quad \text{y} \quad \mathbf{Q}_h := L_{h,0}(\Omega_D) \times \Lambda_h(\Sigma) \times \mathbb{R}, \quad (2.63)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_{h,0}(\Omega_S) &:= \mathbb{H}_h(\Omega_S) \cap \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega_S), & \mathbf{H}_{h,\Gamma_S}^1(\Omega_S) &:= [\mathbf{H}_h^1(\Omega_S)]^n \cap \mathbf{H}_{\Gamma_S}^1(\Omega_S), \\ \mathbf{H}_{h,\Gamma_D}(\Omega_D) &:= \mathbf{H}_h(\Omega_D) \cap \mathbf{H}_{\Gamma_D}(\text{div}; \Omega_D), & L_{h,0}(\Omega_S) &:= L_h(\Omega_D) \cap L_0^2(\Omega_D), \end{aligned} \quad (2.64)$$

el esquema de Galerkin de (2.31) se lee como: Hallar $(\underline{\Phi}_h, \underline{\mathbf{p}}_h) = ((\mathbf{T}_{h,S}, \mathbf{u}_{h,S}, \mathbf{u}_{h,D}), (q_{h,D}, \lambda_h, \mu_h)) \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{Q}_h$, tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{u}_{h,S}}(\underline{\Phi}_h, \underline{\Psi}_h) + \mathbf{B}(\underline{\Psi}_h, \underline{\mathbf{p}}_h) &= \mathbf{F}(\underline{\Psi}_h) \quad \forall \underline{\Psi}_h \in \mathbf{X}_h, \\ \mathbf{B}(\underline{\Phi}_h, \underline{\mathbf{q}}_h) &= 0 \quad \forall \underline{\mathbf{q}}_h \in \mathbf{Q}_h. \end{aligned} \quad (2.65)$$

A su vez, para estudiar la unicidad de la solución de (2.65), y análogamente al caso continuo, nos damos cuenta que (2.65) puede ser reescrito equivalentemente como el problema del punto fijo: Hallar $\mathbf{u}_{h,S} \in \mathbf{M}_h$, tal que

$$\mathcal{J}_h(\mathbf{u}_{h,S}) = \mathbf{u}_{h,S}, \quad (2.66)$$

donde \mathcal{J}_h es el operador del punto fijo definido como $\mathcal{J}_h : \mathbf{M}_h \subseteq \mathbf{H}_{h,\Gamma_S}^1(\Omega_S) \rightarrow \mathbf{H}_{h,\Gamma_S}^1(\Omega_S)$, $\mathbf{w}_{h,S} \rightarrow \mathcal{J}_h(\mathbf{w}_{h,S}) = \mathbf{u}_{h,S}$, donde $\mathbf{u}_{h,S} \in \mathbf{H}_{h,\Gamma_S}^1(\Omega_S)$ es la segunda componente de $\underline{\Phi}_h$, que junto con $\underline{\mathbf{p}}_h \in \mathbf{Q}_h$ constituye la única solución de la versión linealizada de (2.65): Hallar $\mathbf{u}_{h,S} \in \mathbf{H}_{h,\Gamma_S}^1(\Omega_S)$, tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{w}_{h,S}}(\underline{\Phi}_h, \underline{\Psi}_h) + \mathbf{B}(\underline{\Psi}_h, \underline{\mathbf{p}}_h) &= \mathbf{F}(\underline{\Psi}_h) \quad \forall \underline{\Psi}_h \in \mathbf{X}_h, \\ \mathbf{B}(\underline{\Phi}_h, \underline{\mathbf{q}}_h) &= 0 \quad \forall \underline{\mathbf{q}}_h \in \mathbf{Q}_h, \end{aligned} \quad (2.67)$$

y $\mathbf{M}_h \subseteq \mathbf{H}_{h,\Gamma_S}^1(\Omega_S)$ es un subconjunto que nos asegura que el operador \mathcal{J}_h este bien definido, o equivalentemente, que el (2.67) tenga única solución.

De acuerdo a lo anterior, desde ahora nos centraremos en proporcionar las hipótesis adecuadas sobre los espacios finito-dimensionales (2.62), las cuales nos permitirán probar que el problema (2.67) está bien puesto, y consecuentemente, la unicidad de la solución del problema (2.65). Comenzaremos observando que para definir adecuadamente los espacios $\mathbb{H}_{h,0}(\Omega_S)$ y $L_0^2(\Omega_D)$, necesitamos eliminar los múltiplos de la matriz identidad de $\mathbb{H}_h(\Omega_S)$ y los polinomios constantes de $L^2(\Omega_D)$. Estas condiciones se satisfacen si asumimos que:

$$(H.0) \quad \mathbf{P}_0(\Omega_S) \subseteq \mathbf{H}_h(\mathbf{div}; \Omega_S) \text{ y } P_0(\Omega_D) \subseteq L_h(\Omega_D).$$

De (H.0) fácilmente se deduce que para todo h la siguiente descomposición se cumple

$$\mathbb{H}_h(\Omega_S) = \mathbb{H}_{h,0}(\Omega_S) \oplus P_0(\Omega_S) \mathbf{I} \quad \text{y} \quad L_h(\Omega_D) = L_h(\Omega_D) \oplus P_0(\Omega_D). \quad (2.68)$$

Ahora procuraremos establecer condiciones suficientes para la condición inf-sup discreta

$$S_h(\underline{\mathbf{q}}_h) := \sup_{\substack{\underline{\Psi}_h \in \mathbf{X}_h \\ \underline{\Psi}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{B}(\underline{\Psi}_h, \underline{\mathbf{q}}_h)}{\|\underline{\Psi}_h\|_{\mathbf{X}}} \geq \widehat{\beta} \|\underline{\mathbf{q}}_h\|_{\mathbf{Q}} \quad \forall \underline{\mathbf{q}}_h \in \mathbf{Q}_h, \quad (2.69)$$

donde $\widehat{\beta} > 0$ es independiente del parámetro de discretización h . Con este fin aplicaremos los mismos argumentos utilizados en la demostración del Lema 2.2.4 y nos daremos cuenta que la condición inf-sup (2.69) se cumple si garantizamos las siguientes condiciones:

(H.1) Existe $\widehat{c}_1 > 0$ tal que

$$S_{1,h}(q_{h,D}, \xi_h) := \sup_{\substack{\mathbf{v}_{h,D} \in \mathbf{H}_{h,\Gamma_D}(\Omega_D) \\ \mathbf{v}_{h,D} \neq \mathbf{0}}} \frac{(\mathbf{div} \mathbf{v}_{h,D}, q_{h,D})_D + \langle \mathbf{v}_{h,D} \cdot \mathbf{n}, \xi_h \rangle_{\Sigma}}{\|\mathbf{v}_{h,D}\|_{\mathbf{div}; \Omega_D}} \geq \widehat{c}_1 \{ \|q_{h,D}\|_{0,\Omega_D} + \|\xi_h\|_{1/2,\Sigma} \}, \quad (2.70)$$

para todo $(q_{h,D}, \xi_h) \in L_{h,0}(\Omega_D) \times \Lambda_h(\Sigma)$.

(H.2) Existe $\mathbf{v}_{h,0} \in \mathbf{H}_{h,\Gamma_S}^1(\Omega_S) \forall h$ tal que $\langle \mathbf{v}_{h,0} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Sigma} \neq 0$.

En particular, análogo a la demostración de Lema 2.2.3, lo anterior claramente implica

$$S_{2,h}(\xi_h, \eta_h) := \sup_{\substack{\mathbf{v}_{h,S} \in \mathbf{H}_{h,\Gamma_S}^1(\Omega_S) \\ \mathbf{v}_{h,S} \neq \mathbf{0}}} \frac{\langle \mathbf{v}_{h,S} \cdot \mathbf{n}, \xi_h \rangle_{\Sigma} - \eta_h \langle \mathbf{v}_{h,S} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Sigma}}{\|\mathbf{v}_{h,S}\|_{1,\Omega_S}} \geq \widehat{c}_2 |\eta_h| - \widehat{c}_3 \|\xi_h\|_{1/2,\Sigma}, \quad (2.71)$$

con $\widehat{c}_2, \widehat{c}_3 > 0$ independiente de h , eso junto con (2.70) implica (2.69).

Finalmente, nos centraremos en el kernel discreto de \mathbf{B} , el cual se define como

$$\mathbf{V}_h := \left\{ \underline{\Psi}_h \in \mathbf{X}_h : \mathbf{B}(\underline{\Psi}_h, \underline{\mathbf{q}}_h) = 0 \quad \forall \underline{\mathbf{q}}_h \in \mathbf{Q}_h \right\}. \quad (2.72)$$

Con el fin de describir explícitamente \mathbf{V}_h introduciremos los siguientes supuestos:

(H.3) $\operatorname{div} \mathbf{H}_h(\Omega_D) \subseteq L_h(\Omega_D)$ y $P_0(\Sigma) \subseteq \Lambda_h(\Sigma)$

Usando **(H.3)** y recordando la definición de \mathbf{B} (cf. (2.26)) se tiene que $\underline{\Psi}_h = (\mathbf{R}_{h,S}, \mathbf{v}_{h,S}, \mathbf{v}_{h,D}) \in \mathbf{V}_h$ si y solamente si

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_{h,D} \in L_{0,h}(\Omega_D), \quad \langle \mathbf{v}_{h,S} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_{h,D} \cdot \mathbf{n}, \xi_h \rangle_\Sigma = 0 \quad \forall \xi_h \in \Lambda_h \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{v}_{h,S} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_\Sigma = 0. \quad (2.73)$$

En particular, considerando $\xi_h = 1$ en la segunda identidad se obtiene que $\langle \mathbf{v}_{h,D} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_\Sigma = (\operatorname{div} \mathbf{v}_{h,D}, 1)_D = 0$, así $\operatorname{div} \mathbf{v}_{h,D} = 0$ en Ω_D . De esta manera obtenemos la siguiente caracterización de \mathbf{V}_h :

$$\mathbf{V}_h = \left\{ \underline{\Psi}_h \in \mathbf{X}_h : \operatorname{div} \mathbf{v}_{h,D} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_D, \quad \langle \mathbf{v}_{h,S} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_\Sigma = 0 \quad \text{y} \right. \\ \left. \langle \mathbf{v}_{h,S} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_{h,D} \cdot \mathbf{n}, \xi_h \rangle_\Sigma = 0 \quad \forall \xi_h \in \Lambda_h(\Sigma) \right\}. \quad (2.74)$$

Como consecuencia de lo anterior, observamos que la siguiente versión discreta de (2.47) se cumple:

$$\mathbf{A}_S((\mathbf{R}_{h,S}, \mathbf{v}_{h,S}), (\mathbf{R}_{h,S}, \mathbf{v}_{h,S})) + \mathbf{A}_D(\mathbf{v}_{h,D}, \mathbf{v}_{h,D}) \geq \alpha_S \|(\mathbf{R}_{h,S}, \mathbf{v}_{h,S})\|^2 + C_{\mathbf{K}} \|\mathbf{v}_{h,D}\|_{\operatorname{div}, \Omega_D}^2, \quad (2.75)$$

para todo $(\mathbf{R}_{h,S}, \mathbf{v}_{h,S}, \mathbf{v}_{h,D}) \in \mathbf{V}_h$, con α_S definido en (2.48) y $C_{\mathbf{K}}$ la constante positiva que satisface (2.7).

2.3.2. Unicidad de la solución del problema discreto

Comenzaremos estableciendo que el operador \mathcal{J}_h está bien definido, o equivalentemente, que el sistema (2.67) está bien puesto. Para ello observamos primero que, como $\mathbb{H}_{h,0}(\Omega_S)$, $\mathbf{H}_{h,\Gamma_S}^1(\Omega_S)$, $\mathbf{H}_{h,\Gamma_D}(\Omega_D)$ y $\Lambda_h(\Sigma)$ son subespacios de $\mathbb{H}_0(\operatorname{div}; \Omega_S)$, $\mathbf{H}_{\Gamma_S}^1(\Omega_S)$, $\mathbf{H}_{\Gamma_D}^1(\operatorname{div}; \Omega_D)$ y $H^{1/2}(\Sigma)$, respectivamente, las estimaciones (2.35), (2.36), (2.37), (2.38) y (2.39) se mantienen así como (2.40) para cada $\mathbf{w}_{h,S} \in \mathbf{H}_{h,\Gamma_S}^1(\Omega_S)$. A su vez tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.3.1 *Asumir que (H.0) y (H.3) se cumplen. Asumir además que $\kappa_1 > 0$ y $0 < \kappa_2 < 4\nu$, para que α_S definido en (2.48) sea estrictamente positivo. Entonces para cada $\mathbf{w}_{h,S} \in \mathbf{H}_{h,\Gamma_S}^1(\Omega_S)$, tal que*

$$\|\mathbf{w}_{h,S}\|_{1,\Omega_S} \leq \frac{\alpha}{C_{S,2}}, \quad (2.76)$$

con $\alpha = \frac{1}{2} \min\{\alpha_S, C_{\mathbf{K}}\} > 0$, donde $C_{\mathbf{K}}, C_{S,2}$ son constantes positivas que satisfacen (2.7), (2.39), respectivamente, se tiene

$$\mathbf{A}_{\mathbf{w}_{h,S}}(\underline{\Psi}_h, \underline{\Psi}_h) \geq \alpha \|\underline{\Phi}_h\|_{\mathbf{X}}, \quad \forall \underline{\Psi}_h \in \mathbf{V}_h. \quad (2.77)$$

Demostración. Análogo a la demostración del Lema 2.2.1, (2.77) es una consecuencia directa de (2.39), (2.75) y del supuesto (2.76). Se omitirán más detalles. \square

Ahora estamos en condiciones de establecer que el problema (2.67) está bien puesto.

Lema 2.3.2 *Asumir que (H.0), (H.1), (H.2) y (H.3) se cumplen. Asumir además que $\kappa_1 > 0$ y $0 < \kappa_2 < 4\nu$. Entonces, para cada $\mathbf{w}_{h,S} \in \mathbf{H}_{h,\Gamma_S}^1(\Omega_S)$ que satisfaga (2.76) y cada $\mathbf{f}_S \in \mathbf{L}^2(\Omega_S)$ y $\mathbf{f}_D \in \mathbf{L}^2(\Omega_D)$, existe un único $(\underline{\Phi}_h, \underline{\mathbf{p}}_h) \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{Q}_h$ solución de (2.67). Adicionalmente, la siguiente estimación se cumple:*

$$\|\underline{\Phi}_h\|_{\mathbf{X}} \leq \alpha^{-1} \left((4\nu^2 + \kappa_1^2)^{1/2} \|\mathbf{f}_S\|_{0,\Omega_S} + 2\nu \|\mathbf{f}_D\|_{0,\Omega_D} \right), \quad (2.78)$$

y

$$\|\underline{\mathbf{p}}_h\|_{\mathbf{Q}} \leq \widehat{\beta}^{-1} (1 + \alpha^{-1} (C_{\mathbf{A}} + C_{S,2} \|\mathbf{w}_{h,S}\|_{1,\Omega_S})) \left((4\nu^2 + \kappa_1^2)^{1/2} \|\mathbf{f}_S\|_{0,\Omega_S} + 2\nu \|\mathbf{f}_D\|_{0,\Omega_D} \right). \quad (2.79)$$

Demostración. Que el sistema (2.67) tenga única solución se sigue directamente de (2.69), (2.77) y de la teoría clásica de Babuška-Brezzi. A su vez, aplicando los mismos pasos empleados en la demostración del Lema 2.2.5 se obtienen las estimaciones (2.78) y (2.79). \square

De acuerdo al lema anterior, y análogo al caso continuo

According to the previous lemma, and analogously to the continuous case, introducimos el conjunto acotado

$$\mathbf{M}_h := \left\{ \mathbf{v}_{h,S} \in \mathbf{H}_{h,S}^1(\Omega_S) : \|\mathbf{v}_{h,S}\|_{1,\Omega_S} \leq \alpha^{-1} \left((4\nu^2 + \kappa_1^2)^{1/2} \|\mathbf{f}_S\|_{0,\Omega_S} + 2\nu \|\mathbf{f}_D\|_{0,\Omega_D} \right) \right\}.$$

Entonces, asumiendo que (2.58) se cumple, se sigue que el operador del punto fijo \mathcal{J}_h definido a través de (2.67) está bien definido y satisface $\mathcal{J}_h(\mathbf{M}_h) \subseteq \mathbf{M}_h$. Más aún, bajo las hipótesis que \mathbf{f}_S y \mathbf{f}_D satisfacen (2.59), obtenemos el resultado principal de esta sección, a saber, que el problema (2.65) está bien puesto. Este resultado se establecerá ahora.

Teorema 2.3.3 *Asumir que (H.0), (H.1), (H.2) y (H.3) se cumplen y que $\kappa_1 > 0$ y $0 < \kappa_2 < 4\nu$. Asumir además que las fuerzas externas \mathbf{f}_S y \mathbf{f}_D satisfacen (2.59), esto es*

$$\frac{C_{S,2}}{\alpha^2} \left((4\nu^2 + \kappa_1^2)^{1/2} \|\mathbf{f}_S\|_{0,\Omega_S} + 2\nu \|\mathbf{f}_D\|_{0,\Omega_D} \right) < 1.$$

Entonces, existe un único $(\underline{\Phi}_h, \underline{\mathbf{p}}_h) \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{Q}_h$ solución de (2.65). Adicionalmente, se tiene que

$$\begin{aligned} \|\underline{\Phi}_h\|_{\mathbf{X}} &\leq \alpha^{-1} \left((4\nu^2 + \kappa_1^2)^{1/2} \|\mathbf{f}_S\|_{0,\Omega_S} + 2\nu \|\mathbf{f}_D\|_{0,\Omega_D} \right), \\ \|\underline{\mathbf{p}}_h\|_{\mathbf{Q}} &\leq \beta^{-1} (1 + \alpha^{-1} C_{\mathbf{A}} + C_{S,2}) \left((4\nu^2 + \kappa_1^2)^{1/2} \|\mathbf{f}_S\|_{0,\Omega_S} + 2\nu \|\mathbf{f}_D\|_{0,\Omega_D} \right). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Demostración. Aplicando las mismas herramientas empleadas en la demostración del Teorema ??, esto es, las estimaciones (2.77), (2.39) y la suposición (2.59), se puede deducir fácilmente que \mathcal{J}_h es una contracción en \mathbf{M}_h lo cual junto al teorema del punto fijo de Banach implica la unicidad de la solución del problema del punto fijo (2.66), o equivalentemente, que el problema (2.65) esta bien puesto. Más aún, análogamente a la demostración del Teorema ??, la estimación (2.80) se sigue del hecho que la solución $(\underline{\Phi}_h, \underline{\mathbf{p}}_h) = ((\mathbf{T}_{h,S}, \mathbf{u}_{h,S}, \mathbf{u}_{h,D}), (p_{h,D}, \lambda_h, \mu_h)) \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{Q}_h$ satisface (2.78) y (2.79), lo último con $\mathbf{w}_{h,S} = \mathbf{u}_{h,S} \in \mathbf{M}_h$, y del supuesto (2.59). \square

2.3.3. Estimación de Cea

Nuestro próximo objetivo es proporcionar la estimación de Cea para el esquema de Galerkin (2.65). Para este propósito, consideramos $(\underline{\Phi}, \underline{\mathbf{p}}) = ((\mathbf{T}_S, \mathbf{u}_S, \mathbf{u}_D), (p_D, \lambda, \mu)) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Q}$ y $(\underline{\Phi}_h, \underline{\mathbf{p}}_h) = ((\mathbf{T}_{h,S}, \mathbf{u}_{h,S}, \mathbf{u}_{h,D}), (p_{h,D}, \lambda_h, \mu_h)) \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{Q}_h$ las únicas soluciones de (2.31) y (2.65), respectivamente, y notemos que se cumple la siguiente propiedad de ortogonalidad del error :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{u}_S}(\underline{\Phi}, \underline{\Psi}_h) - \mathbf{A}_{\mathbf{u}_{h,S}}(\underline{\Phi}_h, \underline{\Psi}_h) + \mathbf{B}(\underline{\Psi}_h, \underline{\mathbf{p}} - \underline{\mathbf{p}}_h) &= 0 \quad \forall \underline{\Psi}_h \in \mathbf{X}_h, \\ \mathbf{B}(\underline{\Phi} - \underline{\Phi}_h, \underline{\mathbf{q}}_h) &= 0 \quad \forall \underline{\mathbf{q}}_h \in \mathbf{Q}_h. \end{aligned} \quad (2.81)$$

A su vez, por simplicidad, denotamos los correspondientes errores como:

$$\mathbf{e}_{\underline{\Phi}} = \underline{\Phi} - \underline{\Phi}_h, \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_{\underline{\mathbf{p}}} = \underline{\mathbf{p}} - \underline{\mathbf{p}}_h, \quad (2.82)$$

y dado $\underline{\varphi}_h = (\mathbf{S}_{h,S}, \mathbf{z}_{h,S}, \mathbf{z}_{h,D}) \in \mathbf{V}_h$ y $\underline{\mathbf{r}}_h = (r_{h,D}, \vartheta_h, \zeta_h) \in \mathbf{Q}_h$, escribimos

$$\mathbf{e}_{\underline{\Phi}} = \delta_{\underline{\Phi}} + \eta_{\underline{\Phi}} := (\underline{\Phi} - \underline{\varphi}_h) + (\underline{\varphi}_h - \underline{\Phi}_h) \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_{\underline{\mathbf{p}}} = \delta_{\underline{\mathbf{p}}} + \eta_{\underline{\mathbf{p}}} := (\underline{\mathbf{p}} - \underline{\mathbf{r}}_h) + (\underline{\mathbf{r}}_h - \underline{\mathbf{p}}_h). \quad (2.83)$$

El siguiente teorema proporciona la correspondiente estimación de Cea.

Teorema 2.3.4 *Asumir que se cumple (H.0), (H.1), (H.2) y (H.3) y que $\kappa_1 > 0$ y $0 < \kappa_2 < 4\nu$. Supongamos además que*

$$\frac{C_{S,2}}{\alpha^2} ((4\nu^2 + \kappa_1^2)^{1/2} \|\mathbf{f}_S\|_{0,\Omega_S} + 2\nu \|\mathbf{f}_D\|_{0,\Omega_D}) \leq \frac{1}{2}. \quad (2.84)$$

Entonces existe una constante $C_{cea} > 0$ independiente de h , tal que :

$$\|(\underline{\Phi}, \underline{\mathbf{p}}) - (\underline{\Phi}_h, \underline{\mathbf{p}}_h)\|_{\mathbf{X} \times \mathbf{Q}} \leq C_{cea} \inf_{(\underline{\Psi}_h, \underline{\mathbf{q}}_h) \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{Q}_h} \|(\underline{\Phi}, \underline{\mathbf{p}}) - (\underline{\Psi}_h, \underline{\mathbf{q}}_h)\|_{\mathbf{X} \times \mathbf{Q}}. \quad (2.85)$$

Demostración. De la primera ecuación de (2.81), añadido y restando términos adecuados, y recordando la definición de $\mathbf{A}_{\mathbf{u}_{h,S}}$ (cf. (2.25)), llegamos a

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{u}_S}(\mathbf{e}_{\underline{\Phi}}, \underline{\Psi}_h) &= -\mathbf{A}_{\mathbf{u}_{h,S}}(\underline{\Phi}_h, \underline{\Psi}_h) + \mathbf{A}_{\mathbf{u}_S}(\underline{\Phi}_h, \underline{\Psi}_h) - \mathbf{B}(\underline{\Psi}_h, \mathbf{e}_{\underline{\mathbf{p}}}) \\ &= -\mathbf{C}_{\mathbf{u}_S - \mathbf{u}_{h,S}}((\mathbf{T}_{h,S}, \mathbf{u}_{h,S}), (\mathbf{R}_{h,S}, \mathbf{v}_{h,S})) - \mathbf{B}(\underline{\Psi}_h, \mathbf{e}_{\underline{\mathbf{p}}}), \end{aligned} \quad (2.86)$$

para todo $\underline{\Psi}_h = (\mathbf{R}_{h,S}, \mathbf{v}_{h,S}, \mathbf{v}_{h,D}) \in \mathbf{X}_h$, y usando las descomposiciones $\mathbf{e}_{\underline{\Phi}} = \delta_{\underline{\Phi}} + \eta_{\underline{\Phi}}$ y $\mathbf{e}_{\underline{\mathbf{p}}} = \delta_{\underline{\mathbf{p}}} + \eta_{\underline{\mathbf{p}}}$, se deduce que la expresión anterior es equivalente a:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{u}_S}(\eta_{\underline{\Phi}}, \underline{\Psi}_h) = -\mathbf{A}_{\mathbf{u}_S}(\delta_{\underline{\Phi}}, \underline{\Psi}_h) - \mathbf{C}_{\mathbf{u}_S - \mathbf{u}_{h,S}}((\mathbf{T}_{h,S}, \mathbf{u}_{h,S}), (\mathbf{R}_{h,S}, \mathbf{v}_{h,S})) - \mathbf{B}(\underline{\Psi}_h, \delta_{\underline{\mathbf{p}}}) - \mathbf{B}(\underline{\Psi}_h, \eta_{\underline{\mathbf{p}}}),$$

para todo $\underline{\Psi}_h = (\mathbf{R}_{h,S}, \mathbf{v}_{h,S}, \mathbf{v}_{h,D}) \in \mathbf{X}_h$. En particular, para $\underline{\Psi}_h = \eta_{\underline{\Phi}}$, notamos que $\eta_{\underline{\Phi}} \in \mathbf{V}_h$, así, haciendo uso de las estimaciones (2.77), (2.39), (2.38), y denotando por $\delta_{\mathbf{u}_S} = \mathbf{u}_S - \mathbf{z}_{h,S}$ y $\eta_{\mathbf{u}_S} = \mathbf{z}_{h,S} - \mathbf{u}_{h,S}$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \alpha \|\eta_{\underline{\Phi}}\|_{\mathbf{X}}^2 &\leq (C_A + C_{S,2} \|\mathbf{u}_S\|_{1,\Omega_S}) \|\delta_{\underline{\Phi}}\|_{\mathbf{X}} \|\eta_{\underline{\Phi}}\|_{\mathbf{X}} + C_{S,2} (\|\delta_{\mathbf{u}_S}\|_{1,\Omega} + \|\eta_{\mathbf{u}_S}\|_{1,\Omega}) \|\underline{\Phi}_h\|_{\mathbf{X}} \|\eta_{\underline{\Phi}}\|_{\mathbf{X}} \\ &\quad + C_B \|\eta_{\underline{\Phi}}\|_{\mathbf{X}} \|\delta_{\underline{\mathbf{p}}}\|_{\mathbf{Q}}, \end{aligned}$$

que junto con el hecho de que $\|\delta_{\mathbf{u}_S}\|_{1,\Omega} \leq \|\delta_{\underline{\Phi}}\|_{\mathbf{X}}$ y $\|\eta_{\mathbf{u}_S}\|_{1,\Omega} \leq \|\eta_{\underline{\Phi}}\|_{\mathbf{X}}$, implica

$$(\alpha - C_{S,2} \|\underline{\Phi}_h\|_{\mathbf{X}}) \|\eta_{\underline{\Phi}}\|_{\mathbf{X}} \leq (C_A + C_{S,2} \|\mathbf{u}_S\|_{1,\Omega_S} + C_{S,2} \|\underline{\Phi}_h\|_{\mathbf{X}}) \|\delta_{\underline{\Phi}}\|_{\mathbf{X}} + C_B \|\delta_{\underline{\mathbf{p}}}\|_{\mathbf{Q}}$$

Entonces, como $\underline{\Phi}_h$ satisface (2.78), de la estimación (2.56) con $\mathbf{w}_S = \mathbf{u}_S \in \mathbf{M}$ y de la suposición (2.84), obtenemos fácilmente que

$$\|\eta_{\underline{\Phi}}\|_{\mathbf{X}} \leq C_1 \|\delta_{\underline{\Phi}}\|_{\mathbf{X}} + C_2 \|\delta_{\underline{\mathbf{p}}}\|_{\mathbf{Q}},$$

con $C_1, C_2 > 0$ independiente de h , lo que implica que

$$\|\mathbf{e}_{\underline{\Phi}}\|_{\mathbf{X}} \leq (1 + C_1)\|\delta_{\underline{\Phi}}\|_{\mathbf{X}} + C_2\|\delta_{\underline{\mathbf{P}}}\|_{\mathbf{Q}}, \quad (2.87)$$

Por otro lado, de la igualdad (2.86) se tiene que

$$\mathbf{B}(\underline{\Psi}_h, \underline{\eta}_{\underline{\mathbf{P}}}) = -\mathbf{A}_{\mathbf{u}_S}(\mathbf{e}_{\underline{\Phi}}, \underline{\Psi}_h) - \mathbf{C}_{\mathbf{u}_S - \mathbf{u}_{h,S}}((\mathbf{T}_{h,S}, \mathbf{u}_{h,S}), (\mathbf{R}_{h,S}, \mathbf{v}_{h,S})) - \mathbf{B}(\underline{\Psi}_h, \delta_{\underline{\mathbf{P}}}),$$

para todo $\underline{\Psi}_h = (\mathbf{R}_{h,S}, \mathbf{v}_{h,S}, \mathbf{v}_{h,D}) \in \mathbf{X}_h$, y de la condición inf-sup (2.69), las estimaciones (2.38), (2.39), (2.40), (2.78) y (2.56) con $\mathbf{w}_S = \mathbf{u}_S \in \mathbf{M}$, y usando el hecho que $\|\mathbf{u}_S - \mathbf{u}_{h,S}\|_{1,\Omega_S} \leq \|\mathbf{e}_{\underline{\Phi}}\|_{\mathbf{X}}$, se tiene que

$$\widehat{\beta}\|\underline{\eta}_{\underline{\mathbf{P}}}\|_{\mathbf{Q}} \leq \sup_{\substack{\underline{\Psi}_h \in \mathbf{X}_h \\ \underline{\Psi}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{B}(\underline{\Psi}_h, \underline{\eta}_{\underline{\mathbf{P}}})}{\|\underline{\Psi}_h\|_{\mathbf{X}}} \leq C_3\|\mathbf{e}_{\underline{\Phi}}\|_{\mathbf{X}} + C_4\|\delta_{\underline{\mathbf{P}}}\|_{\mathbf{Q}},$$

lo cual combinado con (2.87) implica

$$\|\mathbf{e}_{\underline{\mathbf{P}}}\|_{\mathbf{Q}} \leq \|\underline{\eta}_{\underline{\mathbf{P}}}\|_{\mathbf{Q}} + \|\delta_{\underline{\mathbf{P}}}\|_{\mathbf{Q}} \leq C_5\|\delta_{\underline{\Phi}}\|_{\mathbf{X}} + C_6\|\delta_{\underline{\mathbf{P}}}\|_{\mathbf{Q}}, \quad (2.88)$$

con $C_5, C_6 > 0$, independiente de h . Por lo tanto, recordando que la condición inf-sup (2.69) implica la estimación (see [18, estimate (2.89)])

$$\inf_{\underline{\Psi}_h \in \mathbf{V}_h} \|\underline{\Phi} - \underline{\Psi}_h\|_{\mathbf{X}} \leq c \inf_{\underline{\Psi}_h \in \mathbf{X}_h} \|\underline{\Phi} - \underline{\Psi}_h\|_{\mathbf{X}}, \quad (2.89)$$

con $c > 0$ independiente de h , de (2.87) y (2.87) y del hecho que $\underline{\varphi}_h = (\mathbf{S}_{h,S}, \mathbf{z}_{h,S}, \mathbf{z}_{h,D}) \in \mathbf{V}_h$ y $\underline{\mathbf{r}}_h = (r_{h,D}, \vartheta_h, \zeta_h) \in \mathbf{Q}_h$ son arbitrarios, obtenemos el resultado deseado. \square

2.3.4. Un esquema mixto particular de elementos finitos

En esta sección procederemos similarmente a [5] y [23] y especificaremos ejemplos de subespacios de elementos finitos concretos en 2D y 3D que satisfagan las hipótesis **(H.0)** – **(H.3)**. Con este fin, sean \mathcal{T}_h^S y \mathcal{T}_h^D las respectivas triangulaciones de los dominios Ω_S y Ω_D , las cuales estan formados por triángulos regulares (en \mathbb{R}^2) o tetraedros (en \mathbb{R}^3) de diámetro h_T , y asumir que ellos coinciden en Σ entonces $\mathcal{T}_h^S \cup \mathcal{T}_h^D$ es una triangulación de $\Omega_S \cup \Sigma \cup \Omega_D$. También consideramos Σ_h la partición de Σ heredada de \mathcal{T}_h^S (o \mathcal{T}_h^D). Adicionalmente, denotamos por $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)^\top$ un vector genérico de \mathbb{R}^n y para cada $T \in \mathcal{T}_h^S \cup \mathcal{T}_h^D$ consideramos el espacio local de Raviart–Thomas de orden 0, dado por

$$\text{RT}_0(T) := \mathbf{P}_0(T) \oplus P_0(T)\mathbf{x}.$$

Subespacios de elementos finitos en 2D

Aquí proponemos elegir los espacios de elementos finitos $\mathbf{H}_h^1(\Omega_S)$, $\mathbf{H}_h(\Omega_\star)$ ($\star \in \{S, D\}$) y $L_h(\Omega_D)$ in (2.62) como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_h^1(\Omega_S) &:= \left\{ \mathbf{v}_h \in [\mathcal{C}(\bar{\Omega}_S)]^2 : \mathbf{v}_h|_T \in \mathbf{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^S \right\}, \\ \mathbf{H}_h(\Omega_\star) &:= \left\{ \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbf{H}(\text{div}; \Omega_\star) : \boldsymbol{\tau}_h|_T \in \text{RT}_0(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^\star \right\} \quad \star \in \{S, D\}, \\ L_h(\Omega_D) &:= \left\{ q_h \in L^2(\Omega_D) : q_h|_T \in P_0(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^D \right\}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Observar que $\mathbf{H}_h(\Omega_S)$ y $L_h(\Omega_D)$ claramente satisfacen **(H.0)**. Adicionalmente, **(H.2)** es fácil verificar si la secuencia de subespacios esta anidada o si se puede encontrar un espacio mas grande donde **(H.2)** se cumpla. Entonces $\mathbf{v}_{h,0} \in \mathbf{H}_{h,\Gamma_S}^1(\Omega_S)$ se puede construir exactamente como se explica al final de la demostración de [7, Lemma 3.2].

Ahora, nos dedicaremos a definir el espacio finito dimensional $\Lambda_h(\Sigma)$. Con este fin, supongamos que el número de bordes de Σ_h es par y sea Σ_{2h} la partición de Σ que se forma al unir pares de bordes adyacentes de Σ_h (si el número de bordes de Σ_h es impar, simplemente lo reducimos al caso par uniendo cualquier par de dos elementos adyacentes y luego construyendo Σ_{2h} de esta partición reducida). Entonces, consideramos el conjunto

$$\Lambda_h(\Sigma) := \{ \xi_h \in \mathcal{C}(\Sigma) : \xi_h|_e \in P_1(e) \forall e \in \Sigma_{2h} \}. \quad (2.91)$$

y observamos que $P_0(\Sigma) \subseteq \Lambda_h(\Sigma)$. Por lo tanto, como $\text{div } \mathbf{H}_h(\Omega_D) \subseteq L_h(\Omega_D)$, podemos obtener fácilmente que la hipótesis **(H.3)** se cumple.

Nos queda por demostrar que la hipótesis **(H.1)** se cumple. Para ello recordamos (ver [22]) que el conjunto de trazas normales de $\mathbf{H}_{h,\Gamma_D}(\Omega_D) = \mathbf{H}_h(\Omega_D) \cap \mathbf{H}_{\Gamma_D}(\text{div}; \Omega_D)$ sobre Σ Se define por el subespacio de $L^2(\Sigma)$ dado por

$$\Theta_h(\Sigma) := \{ \phi_h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} : \phi_h|_e \in P_0(e) \forall e \in \Sigma_h \}. \quad (2.92)$$

Análogamente a [30, Lemma A.1] podemos deducir que existe un operador de lifting discreto $\mathcal{L}^h : \Theta_h(\Sigma) \rightarrow \mathbf{H}_{h,\Gamma_D}(\Omega_D)$, que satisface

$$\| \mathcal{L}^h(\phi_h) \|_{\text{div}, \Omega_D} \leq c \| \phi_h \|_{-1/2, \Sigma} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^h(\phi_h) \cdot \mathbf{n} = \phi_h \quad \text{sobre } \Sigma, \quad (2.93)$$

para todo $\phi_h \in \Theta_h(\Sigma)$. A su vez, de [22, Lema 5.1] recordamos que existe $\hat{\beta}_\Sigma > 0$ tal que el par de subespacios $(\Theta_h(\Sigma), \Lambda_h(\Sigma))$ satisface la condición inf-sup discreta:

$$\sup_{\substack{\phi_h \in \Theta_h(\Sigma) \\ \phi_h \neq 0}} \frac{\langle \phi_h, \xi_h \rangle_\Sigma}{\|\phi_h\|_{-1/2, \Sigma}} \geq \hat{\beta}_\Sigma \|\xi_h\|_{1/2, \Sigma} \quad \forall \xi_h \in \Lambda_h(\Sigma). \quad (2.94)$$

Entonces, debido a la existencia de \mathcal{L}_h y la estimación (2.94), es fácil ver que (para más detalle, ver [22, Lema 4.2]) que existe $C > 0$, independiente de h , tal que

$$\sup_{\substack{\mathbf{v}_{h,D} \in \mathbf{H}_{h, \Gamma_D}(\Omega_D) \\ \mathbf{v}_{h,D} \neq \mathbf{0}}} \frac{\langle \mathbf{v}_{h,D} \cdot \mathbf{n}, \xi_h \rangle_\Sigma}{\|\mathbf{v}_{h,D}\|_{\text{div}, \Omega_D}} \geq C \|\xi_h\|_{1/2, \Sigma}. \quad (2.95)$$

Con estas herramientas, estamos en posición de probar la condición inf-sup (2.70).

Lema 2.3.5 *Existe $\hat{c}_1 > 0$, independiente de h , tal que*

$$S_{1,h}(q_{h,D}, \xi_h) := \sup_{\substack{\mathbf{v}_{h,D} \in \mathbf{H}_{h, \Gamma_D}(\Omega_D) \\ \mathbf{v}_{h,D} \neq \mathbf{0}}} \frac{(\text{div } \mathbf{v}_{h,D}, q_{h,D})_{\Omega_D} + \langle \mathbf{v}_{h,D} \cdot \mathbf{n}, \xi_h \rangle_\Sigma}{\|\mathbf{v}_{h,D}\|_{\text{div}, \Omega_D}} \geq \hat{c}_1 \{ \|q_{h,D}\|_{0, \Omega_D} + \|\xi_h\|_{1/2, \Sigma} \}, \quad (2.96)$$

para todo $(q_{h,D}, \xi_h) \in L_{h,0}(\Omega_D) \times \Lambda_h(\Sigma)$.

Demostración. Sea $(q_{h,D}, \xi_h) \in L_{h,0}(\Omega_D) \times \Lambda_h(\Sigma)$ y en primer lugar observar que se cumple

$$S_{1,h}(q_{h,D}, \xi_h) \geq \sup_{\substack{\mathbf{v}_{h,D} \in \tilde{\mathbf{H}}_h(\Omega_D) \\ \mathbf{v}_{h,D} \neq \mathbf{0}}} \frac{(\text{div } \mathbf{v}_{h,D}, q_{h,D})_{\Omega_D}}{\|\mathbf{v}_{h,D}\|_{\text{div}, \Omega_D}},$$

donde $\tilde{\mathbf{H}}_h(\Omega_D) := \{\mathbf{v}_{h,D} \in \mathbf{H}_h(\Omega_D) : \mathbf{v}_{h,D} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_D\}$. Entonces, empleamos el análisis de la [18, Sección 4.3], para obtener

$$S_{1,h}(q_{h,D}, \xi_h) \geq \hat{C} \|q_{h,D}\|_{0, \Omega_D}. \quad (2.97)$$

Por otro lado, está claro que

$$S_{1,h}(q_{h,D}, \xi_h) \geq \sup_{\substack{\mathbf{v}_{h,D} \in \mathbf{H}_{h, \Gamma_D}(\Omega_D) \\ \mathbf{v}_{h,D} \neq \mathbf{0}}} \frac{\langle \mathbf{v}_{h,D} \cdot \mathbf{n}, \xi_h \rangle_\Sigma}{\|\mathbf{v}_{h,D}\|_{\text{div}, \Omega_D}} - \|q_{h,D}\|_{0, \Omega_D}, \quad (2.98)$$

lo cual combinado con (2.95), da como resultado

$$S_{1,h}(q_{h,D}, \xi_h) \geq C \|\xi_h\|_{1/2, \Sigma} - \|q_{h,D}\|_{0, \Omega_D}.$$

Por lo tanto, a partir de la última estimación y de (2.97) obtenemos fácilmente (2.96), lo cual concluye la demostración. \square

Habiendo verificado las hipótesis **(H.0)** – **(H.3)**, una aplicación directa del Teorema 2.3.3 da como resultado que el problema (2.65) esté bien planteado y su correspondiente estimación de Céa.

Teorema 2.3.6 *Sean \mathbf{X}_h y \mathbf{Q}_h los subespacios finito dimensionales definidos por (2.63) en términos de los espacios específicos dados por (2.90) y (2.91) y asumamos que las hipótesis del Teorema 2.3.4 se cumplen. Entonces el esquema de Galerkin (2.65) tiene única solución $(\underline{\Phi}_h, \underline{\mathbf{p}}_h) \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{Q}_h$, la cual satisface la estimación (2.78), (2.79) y (2.85).*

Demostración. Como el supuesto (2.84) implica (2.59) y las hipótesis **(H.0)** – **(H.3)** se cumplen, el resultado se sigue de una aplicación directa de los Teoremas 2.3.3 y 2.3.4. \square

Finalmente, empleando las propiedades de aproximación de los subespacios de elementos finitos involucrados (para más detalle, ver [3, 18, 25, 28]), y las estimaciones a priori (2.85), podemos obtener fácilmente el siguiente resultado.

Teorema 2.3.7 *Asumir que las hipótesis del Teorema 2.3.4 se cumplen. Sea $(\underline{\Phi}, \underline{\mathbf{p}}) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Q}$ y $(\underline{\Phi}_h, \underline{\mathbf{p}}_h) \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{Q}_h$ son las únicas soluciones del problema continuo y discreto (2.31) y (2.65), respectivamente. Asumir además que existe $\delta > 0$ tal que $\mathbf{T}_S \in \mathbb{H}^\delta(\Omega_S)$, $\mathbf{div} \mathbf{T}_S \in \mathbf{H}^\delta(\Omega_S)$, $\mathbf{u}_D \in \mathbf{H}^\delta(\Omega_D)$, $\mathbf{div} \mathbf{u}_D \in H^\delta(\Omega_D)$, $\mathbf{u}_S \in \mathbf{H}^{\delta+1}(\Omega_S)$ y $\mathbf{f}_D \in \mathbf{H}^\delta(\Omega_D)$. Entonces, $p_D \in H^{\delta+1}(\Omega_D)$, $\lambda \in H^{\delta+1/2}(\Sigma)$, y existe, $C > 0$ independiente de h y de las soluciones continua y discreta, tal que*

$$\begin{aligned} \|(\underline{\Phi}, \underline{\mathbf{p}}) - (\underline{\Phi}_h, \underline{\mathbf{p}}_h)\|_{\mathbf{X} \times \mathbf{Q}} \leq Ch^\delta \{ & \|\mathbf{T}_S\|_{\delta, \Omega_S} + \|\mathbf{div} \mathbf{T}_S\|_{\delta, \Omega_S} + \|\mathbf{u}_S\|_{\delta+1, \Omega_S} \\ & + \|\mathbf{u}_D\|_{\delta, \Omega_D} + \|\mathbf{div} \mathbf{u}_D\|_{\delta, \Omega_D} + \|p_D\|_{\delta+1, \Omega_D} \}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Demostración. De la primera ecuación de (2.31) (ver ec. (2.15)) obtenemos fácilmente que $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_D = -\nabla p_D + \mathbf{f}_D$ en Ω_D , lo que implica que $p_D \in H^{1+\delta}(\Sigma)$, de donde $\lambda = p_D|_\Sigma \in H^{1/2+\delta}(\Sigma)$. El resto de la demostración se sigue de la estimación a priori (2.85), las propiedades de aproximación de los espacios discretos involucrados y del hecho que, debido al teorema de trazas en Ω_D , se tiene

$$\|\lambda\|_{\delta+1/2, \Sigma} \leq c\|p_D\|_{\delta+1, \Omega_D}.$$

□

Subespacios de elementos finitos en 3D

Consideremos ahora los espacios discretos:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_h^1(\Omega_S) &:= \left\{ \mathbf{v}_h \in [\mathcal{C}(\bar{\Omega}_S)]^3 : \mathbf{v}_h|_T \in \mathbf{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^S \right\}, \\ \mathbf{H}_h(\Omega_\star) &:= \left\{ \tau_h \in \mathbf{H}(\text{div}; \Omega_\star) : \tau_h|_T \in \text{RT}_0(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^\star \right\} \quad \star \in \{S, D\}, \quad (2.100) \\ L_h(\Omega_D) &:= \left\{ q_h \in L^2(\Omega_D) : q_h|_T \in P_0(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^D \right\}. \end{aligned}$$

Ahora, para definir el espacio discreto para la incógnita λ , introducimos una triangulación independiente $\Sigma_{\hat{h}}$ de Σ , por triángulos K de diámetro \hat{h} , y definimos $\hat{h}_\Sigma := \max\{\hat{h}_K : K \in \Sigma_{\hat{h}}\}$. Entonces, denotando por $\partial\Sigma$ el límite poligonal de Σ , definimos

$$\Lambda_h(\Sigma) := \left\{ \xi_h \in \mathcal{C}(\Sigma) : \xi_h|_K \in P_1(K) \quad \forall K \in \Sigma_{\hat{h}} \right\}. \quad (2.101)$$

De esta forma, definimos los espacios globales \mathbf{X}_h y \mathbf{Q}_h combinando (2.62), (2.63), (2.100), y (2.101).

Ahora, para verificar las hipótesis **(H.0)**–**(H.3)** observamos que aplicando los mismos argumentos que para el caso 2D, se sigue que **(H.0)**, **(H.2)** y **(H.3)** se cumplen. Sin embargo, para la condición inf-sup en **(H.1)** necesitamos proceder diferente al caso 2D y aplicar [19, Lema 7.5]. Más precisamente, utilizando [19, Lema 7.5] se concluye que existe $C_0 \in (0, 1)$ tal que para cada par $(h_\Sigma, \hat{h}_\Sigma)$ que verifica $h_\Sigma \leq C_0 \hat{h}_\Sigma$, la condición inf-sup (2.95) se cumple. De acuerdo a esto, podemos proceder de manera análoga a la demostración del Lema 2.3.5 para verificar **(H.1)**.

Habiendo verificado las hipótesis **(H.0)**–**(H.3)** concluimos que el esquema de Galerkin (2.65) definido con los espacios (2.100) está bien planteado. En adición, debido nuevamente a las propiedades de aproximación de los subespacios de elementos finitos involucrados (ver [3, 18, 25, 28]) y la estimación a priori (2.85),

owing again to the approximations properties of the finite element subspaces involved (see, e.g. [3, 18, 25, 28]), and the a priori estimate (2.85), el siguiente resultado se cumple:

Teorema 2.3.8 *Asumir que las hipótesis del Teorema 2.3.4 se cumplen. Sean $(\underline{\Phi}, \underline{\mathbf{p}}) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Q}$ y $(\underline{\Phi}_h, \underline{\mathbf{p}}_h) \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{Q}_h$ las únicas soluciones del problema continuo y discreto (2.31)*

y (2.65), respectivamente. Supongamos además que existe $\delta > 0$ tal que $\mathbf{T}_S \in \mathbb{H}^\delta(\Omega_S)$, $\mathbf{div} \mathbf{T}_S \in \mathbf{H}^\delta(\Omega_S)$, $\mathbf{u}_D \in \mathbf{H}^\delta(\Omega_D)$, $\mathbf{div} \mathbf{u}_D \in H^\delta(\Omega_D)$, $\mathbf{u}_S \in \mathbf{H}^{\delta+1}(\Omega_S)$ and $\mathbf{f}_D \in \mathbf{H}^\delta(\Omega_D)$. Entonces, $p_D \in H^{\delta+1}(\Omega_D)$, $\lambda \in \mathbf{H}^{\delta+1/2}(\Sigma)$, y existe, $C > 0$ independiente de h y de las soluciones continuas y discretas, tal que

$$\begin{aligned} \|(\underline{\Phi}, \underline{\mathbf{p}}) - (\underline{\Phi}_h, \underline{\mathbf{p}}_h)\|_{\mathbf{x} \times \mathbf{Q}} \leq Ch^\delta \{ & \|\mathbf{T}_S\|_{\delta, \Omega_S} + \|\mathbf{div} \mathbf{T}_S\|_{\delta, \Omega_S} + \|\mathbf{u}_S\|_{\delta+1, \Omega_S} \\ & + \|\mathbf{u}_D\|_{\delta, \Omega_D} + \|\mathbf{div} \mathbf{u}_D\|_{\delta, \Omega_D} + \|p_D\|_{\delta+1, \Omega_D} \}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Capítulo 3

Ejemplos numéricos

En esta sección presentaremos tres ejemplos los cuales ilustran el rendimiento del esquema mixto de elementos finitos aumentado (2.65) sobre un conjunto de triangulaciones uniformes de los correspondientes dominios y consideraremos los espacios de elementos finitos mixtos introducidos en la Sección 2.3.4. La implementación del método esta basada en un código *FreeFem++* (see [27]), en conjunción con el solucionador lineal directo UMFPACK (see [12]). Con respecto a la implementación del método iterativo, las iteraciones son terminadas una vez que el error relativo de todos los vectores de coeficientes entre dos iteraciones consecutivas es suficientemente pequeño, es decir

$$\frac{\|\mathbf{coeff}^{m+1} - \mathbf{coeff}^m\|_{l^2}}{\|\mathbf{coeff}^{m+1}\|_{l^2}} \leq tol,$$

, donde $\|\cdot\|_{l^2}$ es la norma estándar l^2 en \mathbb{R}^N , con N denotando el número total de grados de libertad que definen los subespacios de elementos finitos \mathbf{X}_h y \mathbf{Q}_h , y tol es la tolerancia fija que se especificará en cada ejemplo. Para cada ejemplo simplemente tomamos $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ como estimación inicial.

Se utilizarán además las siguientes notaciones. Consideraremos como $h_\Sigma := \max\{h_e : e \in \Sigma_{2h}\}$ y, al igual que en la Sección 3.3, los errores de cada variable se denotarán como $\mathbf{e}_\mathbf{T} := \mathbf{T}_S - \mathbf{T}_h$, $\mathbf{e}_{\mathbf{u}_S} = \mathbf{u}_S - \mathbf{u}_h$, $\mathbf{e}_{\mathbf{u}_D} = \mathbf{u}_D - \mathbf{u}_{D,h}$, $\mathbf{e}_{p_D} = p_D - p_{h,D}$ y $\mathbf{e}_\lambda = \lambda - \lambda_h$. Además, sean $\mathbf{r}_{\mathbf{T}_S}$, $\mathbf{r}_{\mathbf{u}_S}$, $\mathbf{r}_{\mathbf{u}_D}$, \mathbf{r}_{p_D} y \mathbf{r}_λ los radios de convergencia experimentales, definidos como

$$\mathbf{r}_{\mathbf{T}_S} := \frac{\log(\mathbf{e}_{\mathbf{T}_S}/\mathbf{e}'_{\mathbf{T}_S})}{\log(h_S/h'_S)}, \quad \mathbf{r}_{\mathbf{u}_S} := \frac{\log(\mathbf{e}_{\mathbf{u}_S}/\mathbf{e}'_{\mathbf{u}_S})}{\log(h_S/h'_S)}, \quad \mathbf{r}_{\mathbf{u}_D} := \frac{\log(\mathbf{e}_{\mathbf{u}_D}/\mathbf{e}'_{\mathbf{u}_D})}{\log(h_D/h'_D)},$$
$$\mathbf{r}_{p_D} := \frac{\log(e_{p_D}/e'_{p_D})}{\log(h_D/h'_D)}, \quad \mathbf{r}_\lambda := \frac{\log(e_\lambda/e'_\lambda)}{\log(h_\Sigma/h'_\Sigma)}$$

donde h_\star y $h'_\star (\star \in \{S, D, \Sigma\})$ denotan dos tamaños de malla consecutivo con sus respectivos errores \mathbf{e}, \mathbf{e}' (o e, e'). Para cada ejemplo que veremos a continuación consideraremos los parámetros $\alpha_D = 1, \rho = 1$ y $\mathbf{K} = \mathbf{I}$.

En nuestro primer ejemplo, consideraremos el dominio poroso $\Omega_D := (-1/2, 1/2) \times (0, -1/2)$ acoplado al dominio fluido en forma de semidisco dado por $\Omega_S := \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1/2^2 \text{ y } x_2 > 0\}$. Los datos \mathbf{f}_S y \mathbf{f}_D se escogen de modo que la solución exacta este dada por

$$\mathbf{u}_S(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \cos(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \\ -\cos(\pi x_2) \sin(\pi x_1) \end{pmatrix} \quad \text{en } \Omega_S$$

para todo $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega_S$, y

$$\mathbf{u}_D(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} -\frac{64}{\pi} x_2 (x_2^2 - 0.25) \cos(\pi x_1) \\ -16 \sin(\pi x_1) (x_2^2 - 0.25)^2 \end{pmatrix} \quad \text{en } \Omega_D$$

$$p_D(\mathbf{x}) := \cos(x_1) + ax_2, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega_D$$

con a una constante que se escoge de modo que $\int p_D = 0$. Notar que la solución satisface $\mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}$ sobre Σ y la condición de contorno $\mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre Γ_D . Sin embargo, la condición de contorno Dirichlet para la velocidad de Navier Stokes sobre Γ_S no es homogénea. Entonces, debemos modificar el funcional de la siguiente manera

$$\mathbf{F}(\underline{\Psi}) := 2\nu(\mathbf{f}_S, \mathbf{v}_S)_{\Omega_S} + 2\nu(\mathbf{f}_D, \mathbf{v}_D)_{\Omega_D} - \kappa_1(\mathbf{f}_S, \mathbf{div} \mathbf{R}_S)_{\Omega_S} + 2\mu\langle \mathbf{R}_S \mathbf{n}, \mathbf{u}_S \rangle_{\Gamma_S} \quad \forall \underline{\Psi} \in \mathbf{X}.$$

En nuestro segundo ejemplo, consideraremos las regiones $\Omega_S := (0, 1) \times (1, 2)$ y $\Omega_D = (0, 1) \times (0, 1)$. Los datos \mathbf{f}_S y \mathbf{f}_D se escogen de manera que la solución exacta este dada por

$$\mathbf{u}_S(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{\pi}{2}x_2\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}x_1\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}x_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}x_2\right) \end{pmatrix}$$

para todo $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega_S$ y

$$\mathbf{u}_D(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x_1\right) (x_2 - 1) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}x_1\right) (2x_2 - x_2^2) \end{pmatrix}$$

$$p_D(\mathbf{x}) := \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x_1\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}x_2\right) - \frac{32}{\pi^3} x_2 (x_1 - 1), \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega_D$$

En los cuadros 3.1 y 3.2 se resume el historial de convergencia para la secuencia de triangularizaciones uniformes, considerando los espacios de elementos finitos descritos en la Sección 2.3.4, y resolviendo ambos problemas no lineales con una tolerancia $tol = 10^{-6}$. Notar que, en ambos ejemplos la tasa de convergencia $\mathcal{O}(h)$ prevista por el Teorema , se alcanza en todas las variables. De esta forma, para el primer ejemplo, en la figura 3.1 se observa la segunda componente del vector velocidad $\mathbf{u}_h = (\mathbf{u}_{h,S}, \mathbf{u}_{h,D})$ (izquierda) y la magnitud del vector velocidad (derecha) con $N = 411915$, y siguiendo esta línea en la figura 3.2 se muestra la primera fila del tensor aproximado \mathbf{T}_h y la presión aproximada $p_{h,D}$, ambas con $N = 411915$. A continuación, para el Ejemplo 2, en la figura 3.3 a la izquierda se muestra la segunda componente del vector velocidad \mathbf{u}_h , mientras que a la derecha se muestra la magnitud del vector velocidad, con $N = 1007107$. En particular, notar que tanto en la figura 3.1 como en la figura 3.3 (a la derecha) se ve gráficamente que el método preserva la dirección de las velocidades sobre Σ , como se esperaba. Finalmente, en las figura3.4 se muestra la primera fila del tensor $\mathbf{T}_{h,S}$ (izquierda) y la presión aproximada p_D (derecha) con $N = 1007107$.

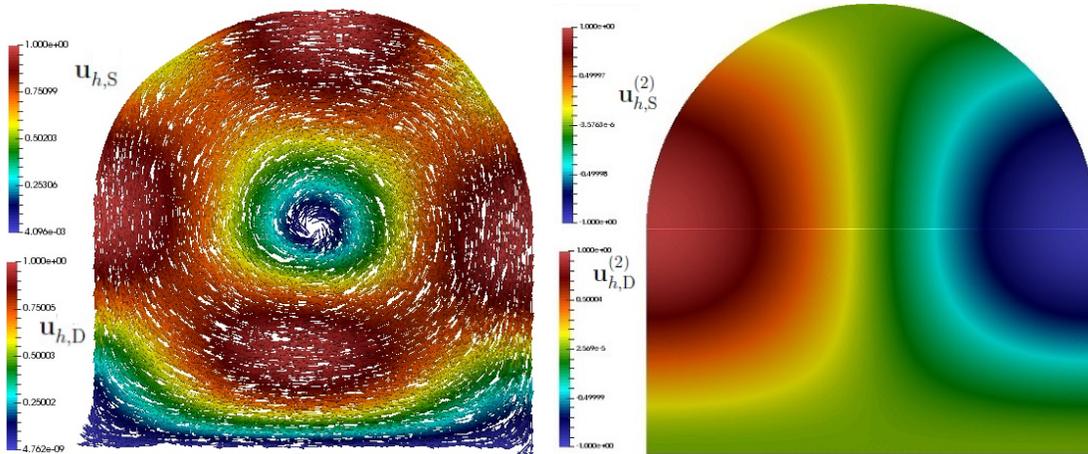


Figura 3.1: segunda componente de $\mathbf{u}_{S,h}$ y $\mathbf{u}_{D,h}$ y magnitud del vector velocidad \mathbf{u}_h (EJEMPLO 1)

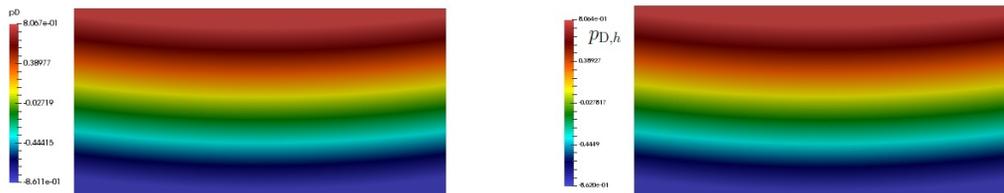


Figura 3.2: primera fila del tensor aproximado \mathbf{T}_h y presión aproximada $p_{h,D}$ (EJEMPLO 1)

Cuadro 3.1: Grados de libertad N , tamaño de la malla h , errores, y radio de convergencia para la aproximación mixta del problema acoplado de the Navier-Stokes/Darcy. (EJEMPLO 1:)

N	h_S	$e_{\mathbf{T}_S}$	$\mathbf{r}_{\mathbf{T}_S}$	$e_{\mathbf{u}_S}$	$\mathbf{r}_{\mathbf{u}_S}$
458	0.1901	1.1196	-	0.3459	-
1707	0.0911	0.5638	0.9302	0.1679	0.9801
6588	0.0486	0.2825	1.0972	0.0833	1.1122
26399	0.0242	0.1374	1.0353	0.0414	1.0064
103855	0.0134	0.0696	1.0822	0.0208	1.0935
411915	0.0077	0.0352	1.1468	0.0104	1.1630
N	h_D	$e_{\mathbf{u}_D}$	$\mathbf{r}_{\mathbf{u}_D}$	e_{p_D}	r_{p_D}
458	0.2001	0.0056	-	0.0872	-
1707	0.0937	0.0027	0.9807	0.0442	0.8979
6588	0.0470	0.0012	1.1002	0.0219	1.0138
26399	0.0250	0.0006	1.1380	0.0107	1.1257
103855	0.0129	0.0003	1.0944	0.0054	1.0338
411915	0.0068	0.0001	1.0811	0.0027	1.0838
N	h_Σ	e_λ	r_λ		
458	0.125	0.0169	-		
1707	0.0625	0.0069	1.3016		
6588	0.0313	0.0036	0.9391		
26399	0.0156	0.0019	0.9338		
103855	0.0078	0.0009	1.0351		
411915	0.0039	0.0005	0.9732		

En el tercer ejemplo nos centraremos en el rendimiento del método iterativo con respecto a la viscosidad ν . Con este fin consideraremos los dominios $\Omega = \Omega_S \cup \Sigma \cup \Omega_D$, con $\Omega_S := (-1/2, 3/2) \times (0, 1/2)$ y $\Omega_D := (-1/2, 3/2) \times (0, -1/2)$. De esta manera, los términos del lado derecho son ajustados de manera que la solución exacta está dada por las funciones:

$$\mathbf{u}_S(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 1 - e^{\gamma x_1} \cos(2\pi x_2) \\ \frac{\gamma}{2\pi} e^{\gamma x_1} \sin(2\pi x_2) \end{pmatrix} \quad \text{en } \Omega_S$$

para todo $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega_S$, y

$$\mathbf{u}_D := \begin{pmatrix} (x_1 + 0.5)(x_1 - 1.5) \\ -(x_2 + 2)(2x_1 - 1) \end{pmatrix} \quad \text{en } \Omega_D$$

$$p_D := (x_1 - 0.5)^3(x_2 + 1), \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega_D$$

donde

$$\gamma := \frac{-8\pi}{\sqrt{\mu^{-2} + 16\pi^2} + \mu^{-1}}$$

Cuadro 3.2: Grados de libertad N , tamaño de la malla h_* , errores, y radios de convergencia para la aproximación mixta del problema de Navier–Stokes/Darcy con $\nu = 1$ y $\kappa_1 = \nu/2$ and $\kappa_2 = 2\kappa_1$. (EJEMPLO 2:)

N	h_S	$e_{\mathbf{T}_S}$	$\mathbf{r}_{\mathbf{T}_S}$	$e_{\mathbf{u}_S}$	$\mathbf{r}_{\mathbf{u}_S}$
1109	0.1901	0.2747	-	0.1173	-
4117	0.1021	0.1379	1.1074	0.0597	1.0866
16140	0.0507	0.0690	0.9898	0.0293	1.0177
63795	0.0271	0.0345	1.1084	0.0148	1.0887
255668	0.0135	0.0171	1.0096	0.0074	0.9999
1007107	0.0073	0.0085	1.1238	0.0036	1.1402
N	h_D	$e_{\mathbf{u}_D}$	$\mathbf{r}_{\mathbf{u}_D}$	e_{p_D}	r_{p_D}
1109	0.1901	0.0138	-	0.0322	-
4117	0.0966	0.0069	1.0374	0.0163	1.0112
16140	0.0573	0.0034	1.3207	0.0079	1.3752
63795	0.0259	0.0017	0.8773	0.0040	0.8732
255668	0.0135	0.0009	1.0727	0.0020	1.0591
1007107	0.0070	0.0004	1.0475	0.0010	1.0414
N	h_Σ	e_λ	r_λ		
1109	0.1250	0.0246	-		
4117	0.0625	0.0124	0.9952		
16140	0.0313	0.0061	1.0082		
63795	0.0156	0.0029	1.0742		
255668	0.0078	0.0015	1.0062		
1007107	0.0039	0.0007	1.0122		

Notar que \mathbf{u}_S es conocida como la solución analítica del problema de Navier–Stokes obtenida por Kovasznay en [27], la cual es estudiada en la frontera $\{-1/2\} \times (0, 2)$. En el Cuadro 3.3 mostraremos el comportamiento del método iterativo como una función de ν , considerando diferentes tamaños de malla y considerando $h := \max\{h_S; h_D\}$, y una tolerancia $tol = 1e-04$. Los experimentos numéricos para valores más pequeños de ν no se considerarán debido a que el método iterativo necesita de muchas iteraciones para lograr convergencia (más de 100). Siguiendo en esta línea los resultados numéricos en el Cuadro 3.4 muestran el historial de convergencia para una secuencia de triangulaciones uniformes, considerando la viscosidad $\nu = 0.1$. Se verá que las incógnitas involucradas en este problema, satisfacen el radio de convergencia $O(h)$ proporcionado por el Teorema 3.

Cuadro 3.3: Historial de convergencia del método iterativo, con respecto al parámetro ν .(EJEMPLO 3:)

μ	$h = 0.37499$	$h = 0.20009$	$h = 0.09576$	$h = 0.04915$	$h = 0.02698$	$h = 0.01392$
1	5	4	4	4	4	4
0.1	10	8	8	8	9	9
0.01	-	-	-	53	65	68

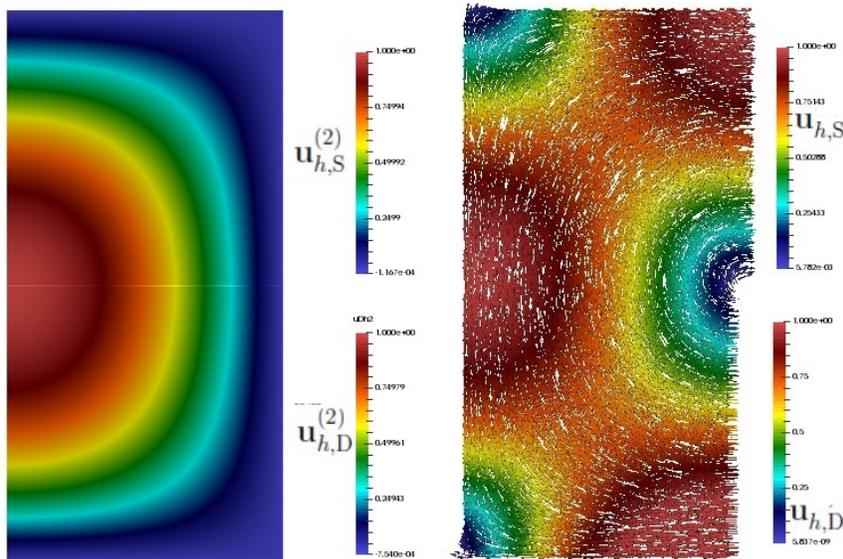


Figura 3.3: segunda componente de $\mathbf{u}_{S,h}$ y $\mathbf{u}_{D,h}$ y magnitud del vector velocidad \mathbf{u}_h (EJEMPLO 2)

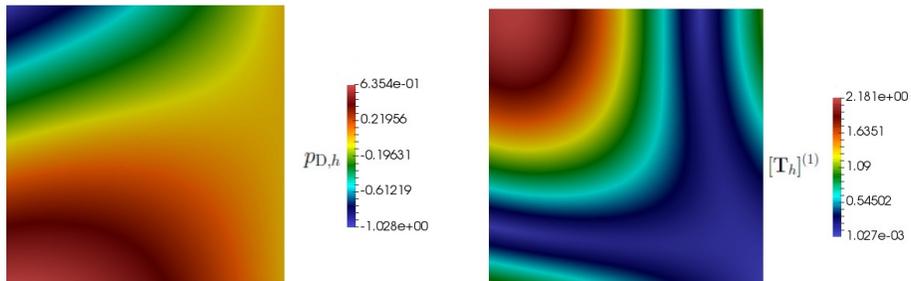


Figura 3.4: primera fila del tensor aproximado \mathbf{T}_h y de la presión aproximada $p_{h,D}$ (EJEMPLO 2)

Cuadro 3.4: Grados de libertad N , tamaño de la malla h_* , errores, y radios de convergencia para la aproximación mixta del problema de Navier–Stokes/Darcy con $\nu = 0.1$ y $\kappa_1 = \nu^2/3$ and $\kappa_2 = 3\nu$. (EJEMPLO 3:)

N	h_S	$\mathbf{e}_{\mathbf{T}_S}$	$\mathbf{r}_{\mathbf{T}_S}$	$\mathbf{e}_{\mathbf{u}_S}$	$\mathbf{r}_{\mathbf{u}_S}$
284	0.3536	2.2341	-	1.8824	-
1034	0.2001	0.9226	1.5537	0.8833	1.3293
4125	0.0958	0.3279	1.4037	0.4215	1.0040
14886	0.0492	0.1353	1.3278	0.2136	1.0189
60055	0.0270	0.0620	1.3013	0.1061	1.1660
231080	0.0139	0.0301	1.0904	0.0531	1.0477
N	h_D	$\mathbf{e}_{\mathbf{u}_D}$	$\mathbf{r}_{\mathbf{u}_D}$	e_{p_D}	r_{p_D}
284	0.3750	0.2980	-	0.0665	-
1034	0.2001	0.1474	1.1205	0.0317	1.1786
4125	0.0950	0.0678	1.0436	0.0145	1.0509
14886	0.0485	0.0347	0.9939	0.0072	1.0360
60055	0.0254	0.0172	1.0864	0.0037	1.0426
231080	0.0160	0.0086	1.4990	0.0018	1.5167
N	h_Σ	e_λ	r_λ		
284	0.1250	0.1674	-		
1034	0.0625	0.0651	1.3622		
4125	0.0313	0.0232	1.4877		
14886	0.0156	0.0084	1.4611		
60055	0.0078	0.0031	1.4434		
231080	0.0039	0.0012	1.4117		

Bibliografía

- [1] L. BADEA, M. DISCACCIATI, AND A. QUARTERONI, *Numerical analysis of the Navier–Stokes/Darcy coupling*. Numer. Math. 115 (2010), no. 2, 195–227.
- [2] G.S.BEAVERS AND D.D.JOSEPH, *Boundary conditions at a naturally permeable wall..* J.Fluid Mech. 30 (1967), 197-207.
- [3] F. BREZZI AND M. FORTIN, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer Series in Computational Mathematics, 15. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [4] M. CAI, M. MU, AND J. XU, *Numerical solution to a mixed Navier–Stokes/Darcy model by the two-grid approach*. SIAM J. Numer. Anal. 47 (2009), 3325–3338.
- [5] J. CAMAÑO, G.N. GATICA, R. OYARZÚA, R. RUIZ-BAIER AND P. VENEGAS, *New fully-mixed finite element methods for the Stokes-Darcy coupling*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 295 (2015), 362–395.
- [6] J. CAMAÑO, G. N. GATICA, R. OYARZÚA AND R. RUIZ-BAIER, *An augmented stress-based mixed finite element method for the Navier-Stokes equations with nonlinear viscosity*. Numerical Methods for Partial Differential Equations. 33 (2017), 1692–1725
- [7] J. CAMAÑO, G.N. GATICA, R. OYARZÚA AND G. TIERRA, *An augmented mixed finite element method for the Navier-Stokes equations with variable viscosity*.SIAM J. Numer. Anal. 54 (2016), 1069–1092.
- [8] J. CAMAÑO, R. OYARZÚA, R. RUIZ-BAIER AND G. TIERRA, *Error analysis of an augmented mixed method for the Navier–Stokes problem with mixed boundary conditions*. IMA J. Numer. Anal. 38 (2018), 1452–1484.

- [9] S. CAUCAO, G.N. GATICA, R. OYARZÚA AND I. ŠEBESTOVÁ, *A fully-mixed finite element method for the Navier-Stokes/Darcy coupled problem with nonlinear viscosity*. J. Numer. Math. 25 (2017), 55–88.
- [10] P.G. CIARLET, *The finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, (1978).
- [11] P. CHIDYAGWAI AND B. RIVIÈRE, *On the solution of the coupled Navier–Stokes and Darcy equations*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 198 (2009), 3806–3820.
- [12] T. DAVIS, *Algorithm 832: UMFPACK V4.3 - an unsymmetric-pattern multifrontal method*. ACM Trans. Math. Software 30 (2004), 196–199.
- [13] M. DISCACCIATI, E. MIGLIO AND A. QUARTERONI, *Mathematical and numerical models for coupling surface and groundwater flows*. Appl. Numer. Math. 43 (2002), 57–74.
- [14] M. DISCACCIATI AND R. OYARZÚA, *A conforming mixed finite element method for the Navier–Stokes/Darcy coupled problem*. J. Numer. Math. 135 (2017), 571–606.
- [15] M. DISCACCIATI AND A. QUARTERONI, *Navier–Stokes/Darcy coupling: modeling, analysis, and numerical approximation*. Rev. Mat. Complut. 22 (2009), 315–426.
- [16] A. ERN AND J.-L. GUERMOND, *Theory and Practice of Finite Elements*. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, vol. 159, (2004).
- [17] J.GALVIS AND M.SARKIS, *Non matching mortar discretization analysis for the coupling Stokes-Darcy equations*. Electron. Trans. Numer. Anal. 26 (2007), 350i–384.
- [18] G.N. GATICA, *A Simple Introduction to the Mixed Finite Element Method. Theory and Applications*. Springer Briefs in Mathematics, Springer, Cham Heidelberg New York Dordrecht London, (2014).
- [19] G.N. GATICA, G.C. HSIAO, AND S. MEDDAHI, *A coupled mixed finite element method for the interaction problem between an electromagnetic field and an elastic body*. SIAM J. Numer. Anal. 48 (2010), 1338–1368.
- [20] G.N. GATICA, A. MÁRQUEZ, R. OYARZÚA, AND R. REBOLLEDO, *Analysis of an augmented fully-mixed approach for the coupling of quasi-Newtonian fluids and porous media*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 270 (2014), 76–112.

- [21] G. N. GATICA, S. MEDDAHI AND R. OYARZÚA, *A conforming mixed finite element method for the coupling of fluid flow with porous media flow*. IMA J. Numer. Anal. 29 (2009), 86–108.
- [22] G.N. GATICA, R. OYARZÚA, AND F.J. SAYAS, *Analysis of fully-mixed finite element methods for the Stokes–Darcy coupled problem*. Math. Comp. 80 (2011), no. 276, 1911–1948.
- [23] G.N. GATICA, R. OYARZÚA, AND F.J. SAYAS, *A two saddle point approach for the coupling of fluid flow with nonlinear porous media flow*. IMA J. Numer. Anal. 32 (2012), 845–887.
- [24] G.N. GATICA, F. SEQUEIRA, *Analysis of the HDG method for the Stokes-Darcy coupling*. Numer. Methods Partial Differential Equations 33 (2017), 885–917
- [25] V. GIRAULT AND P.-A. RAVIART, *Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations. Theory and algorithms*. Springer Series in Computational Mathematics, 5. Springer–Verlag, Berlin, (1986).
- [26] V. GIRAULT AND B. RIVIÈRE, *DG approximation of coupled Navier–Stokes and Darcy equations by Beaver–Joseph–Saffman interface condition*. SIAM J. Numer. Anal. 47 (2009), 2052–2089.
- [27] F. HECHT, *New development in FreeFem++*. J. Numer. Math, 20,(2012), 251–265.
- [28] R. HIPTMAIR, *Finite elements in computational electromagnetism*. Acta Numer. 11 (2002), 237–339.
- [29] W. JÄGER AND A. MIKELIĆ, *On the interface boundary condition of Beavers, Joseph and Saffman*. SIAM J. Appl. Math. 60 (2000), 1111–1127.
- [30] A. MÁRQUEZ, S. MEDDAHI, F.J. SAYAS, *Strong coupling of finite element methods for the Stokes-Darcy problem*. IMA J. Numer. Anal. 35 (2015), 969–988.
- [31] A. MASUD, *A stabilized mixed finite element method for Darcy-Stokes flow*. Internat. J. Numer. Methods Fluids 54 (2007), 665–681.
- [32] P.G. SAFFMAN, *On the boundary condition at the interface of a porous medium*. Stud.Appl. Math., 1 (1971), 93–101.

- [33] L. ZUO AND Y. HOU, *Numerical analysis for the mixed Navier–Stokes and Darcy problem with the Beavers–Joseph interface condition*. Numer. Methods Partial Differential Equations 31 (2015) , 1009–1030.